

Un modello per la rappresentazione della dinamica verticale di un binario ferroviario alle alte frequenze

Dott. Ing. Andrea BRACCIALI(), Dott. Ing. Gaetano CASCINI(*)*

SOMMARIO – Nel presente lavoro viene affrontata la modellazione del comportamento verticale di un tratto di linea ferroviaria sotto eccitazione verticale. Il metodo di modellazione utilizzato consente di descrivere il comportamento del binario fino a 5 kHz, tipico ad esempio delle analisi in campo acustico, utilizzando un numero di parametri decisamente ridotto. Vengono descritte la campagna prove per l'acquisizione delle risposte sperimentali del binario, la scelta del modello ottimale, la modellazione effettuata con tecniche di analisi dei segnali nel dominio del tempo e la validazione del modello stesso con indicazione dell'affidabilità statistica dei risultati. Infine vengono descritte le applicazioni e gli sviluppi che possono discendere dal modello qui presentato.

1. Introduzione

In un precedente lavoro pubblicato su questa rivista [1], gli autori hanno descritto un metodo per la ricostruzione della forza mobile in ingresso ad un sistema meccanico fortemente smorzato. In tale lavoro, preliminare alla ricerca qui presentata, veniva utilizzata, quale struttura sulla quale mettere a punto l'algoritmo ivi descritto e denominato HF-MIRA (High Frequency Mobile Input Reconstruction Algorithm), una semplice trave composita costituita da due barrette di acciaio collegate con uno strato di materiale viscoelastico.

Ovviamente tale sistema, ben lungi da voler rappresentare un binario ferroviario nella sua complessità, aveva lo scopo precipuo di consentire, in maniera semplice e perfettamente ripetibile (e disponibile!), lo sviluppo della fase critica del lavoro, ossia l'algoritmo di ricostruzione.

Una volta sviluppato il metodo di ricostruzione, sono state effettuate misure di risposta dinamica del binario che possono essere utilizzate direttamente nel suddetto HF-MIRA e che sono descritte nel presente lavoro. Le risposte del binario, effettivamente simili a quelle utilizzate in [1], hanno in particolare consentito di evidenziare come il modello utilizzato per la trave non era il più idoneo per la modellazione del binario reale. Nella caratterizzazione del binario si sono utilizzati più trasduttori montati in diversi punti sulla medesima sezione di misura della rotaia, al fine di compiere una stima più robusta e ridondata delle caratteristiche reali del binario; il modello finale risulta decisamente rispondente alla realtà.

Anche nel presente lavoro, per ovvi motivi di spazio, non sarà possibile entrare troppo nel dettaglio della

modellazione e della sperimentazione; ciò nonostante si utilizzerà il linguaggio più chiaro possibile sempre sottolineando l'aspetto ferroviario pratico del procedimento che, nella sua parte centrale, è un'applicazione tipica dell'Analisi dei Segnali.

2. La modellazione del binario

L'interesse ingegneristico per la modellazione di binari ferroviari risale al secolo scorso; fin da allora è apparsa evidente la necessità di creare degli strumenti in grado di simulare il comportamento del binario per valutarne le sollecitazioni e cautelarsi da possibili danneggiamenti.

Con il passare del tempo l'attività di modellazione è stata intrapresa con le finalità più disparate: modelli di binario vengono oggi usati per studiare il comportamento dinamico dei veicoli, per valutare gli effetti della fatica sulle rotaie e per prevederne l'usura, per simulare il comportamento di singoli componenti quali traverse, attacchi, railpads, ballast, per stimare la propagazione delle vibrazioni nel terreno, per simulare l'interazione ruota-rotaia al fine di prevederne l'emissione sonora, e così via.

Quale che sia l'impiego del modello, dal punto di vista ingegneristico è necessario che le relazioni fra le variabili del sistema siano rappresentate in termini di equazioni algebriche o differenziali.

La costruzione di un modello matematico può seguire due strade. La prima consiste nel suddividere il sistema stesso in tanti sottoinsiemi di cui sia noto il comportamento; l'insieme delle leggi che identificano tali sottoinsiemi, opportunamente "unite", costituiscono un modello del sistema principale. È evidente che questo approccio non richiede necessariamente l'osservazione dei fenomeni; in tal caso l'attività sperimentale è utile essenzialmente alla validazione del modello o al più alla calibrazione dei

(*) Università degli Studi di Firenze – Dipartimento di Meccanica e Tecnologie Industriali.

parametri non definiti per via teorica. L'alternativa è la strada tipica dell'Identificazione di Sistemi, ovvero la costruzione del modello del sistema a partire dai segnali misurati delle grandezze in ingresso ed in uscita fra cui si vuole trovare il legame matematico.

Generalmente l'approccio alla modellazione più seguito è il primo. La scelta è legata alla possibilità di sviluppare separatamente lo studio dei diversi sottosistemi del binario che vengono interfacciati solo nell'ultimo stadio della modellazione. I vantaggi offerti dalla modularità di questi modelli sono evidenti: è sempre possibile integrare o migliorare la rappresentazione delle caratteristiche modellate in maniera grossolana, eventualmente facendo ricorso alle soluzioni adottate da altri ricercatori. Inoltre, tecniche di questo tipo sono strettamente legate alla fisica del sistema, per cui sono facilmente individuabili gli aspetti più deboli della modellazione.

Il campo di frequenze analizzato è ovviamente diverso in funzione dell'utilizzo o delle finalità del modello. Nelle applicazioni legate allo studio di fenomeni di rumore, e l'ambiente ferroviario non fa eccezione, è necessario che la validità del modello sia estesa in un ampio campo di frequenze, almeno fino a 5 kHz. A questa esigenza si contrappongono le notevoli difficoltà che si incontrano nel rappresentare il comportamento di un sistema particolarmente complesso quale un binario ferroviario. La lunghezza "infinita" del binario, la periodicità dei supporti (le traverse), la presenza di componenti quali i railpads o il ballast dal comportamento fortemente non lineare, non sono altro che un esempio degli ostacoli da superare all'atto della modellazione.

Una trattazione completa sulle modalità di modellazione dell'interazione veicolo-binario è riportata in [2]. Dall'esame dei diversi modelli presenti in letteratura si possono trarre alcune conclusioni di carattere generale. La capacità di rappresentare il comportamento del binario fino alle alte frequenze viene pagata in termini di una elevata complessità dei modelli che risultano sempre più sofisticati. Ad esempio, è universalmente riconosciuta l'inadeguatezza di una modellazione della rotaia come trave, sia pure tenendo conto dell'inerzia alla rotazione e del taglio (trave di Timoshenko); per frequenze superiori ad 1 kHz, infatti, si hanno notevoli deformazioni della sua sezione trasversale che impongono una rappresentazione adeguata.

La conseguenza immediata è che quei pochi modelli che sono realmente in grado di rappresentare il comportamento del binario vengono a perdere proprio le caratteristiche che facevano preferire questo tipo di approccio: si è avuto un aumento spropositato dei parametri in gioco, tanto che non è più possibile valutarli per via teorica. Non solo è allora necessario un lungo lavoro di calibrazione del modello sulla base di dati di origine sperimentale, ma per di più si ha che tali parametri finiscono col perdere il significato fisico per il quale erano stati introdotti. A puro titolo di esempio si vedano i diversi valori di rigidità e smorzamento attribuiti a ballast e railpads riportati in [2]: si hanno discordanze di 1+2 ordini di grandezza.

A fronte di questa perdita di efficacia della modellazione teorica del binario si è seguita la strada dell'identificazione di Sistemi: si è deciso di costruire un modello del binario a partire esclusivamente dai dati di origine sperimentale. Le tecniche adottate in questo lavoro non si limitano ad una misura della risposta in frequenza del sistema, ma portano alla realizzazione di un modello parametrico autoregressivo⁽¹⁾, atto a rappresentare il comportamento del binario fra 100 e 5000 Hz, vale a dire in tutto il campo di frequenze tipico del rumore ferroviario.

3. Attività sperimentale

La raccolta dei dati sperimentali riveste un ruolo fondamentale, in quanto essi non solo vengono impiegati nella validazione del modello ma soprattutto sono direttamente utilizzati per la costruzione del modello stesso.

Le principali difficoltà riscontrate derivano dall'elevato smorzamento del sistema, che determina risposte a forze impulsive di durata particolarmente breve.

Il modello del binario presentato in questo lavoro può essere, ad esempio, utilizzato in applicazioni di ricostruzione delle forze di contatto ruota-rotaia [1]; la scelta degli ingressi e delle uscite da considerare nello sviluppo del modello è finalizzata a tale applicazione, ma ciò non è ovviamente limitante per la completa validità della modellazione. Lo studio è limitato alla dinamica verticale in presenza di eccitazioni verticali nell'intervallo 100÷5000 Hz; data la bassa trasmissività delle forze verticali attraverso le traverse nel campo di frequenze esaminato [3], si è concentrata l'attenzione su una sola rotaia ed in particolare su un tratto di lunghezza 3900 mm. Nell'ipotesi di validità delle condizioni di simmetria, si può affermare che il modello è in grado di rappresentare un tratto di binario di lunghezza doppia (7800 mm).

Le misure sono state realizzate sul binario dispari della linea Firenze SMN - Firenze Campo Marte, a circa 1.5 km da Firenze SMN. Per evitare interruzioni all'esercizio, la linea era regolarmente aperta al transito durante la campagna prove, per cui non è stato possibile utilizzare uno *shaker* elettrodinamico per impartire le forze, in quanto

⁽¹⁾ La serie temporale di una grandezza fisica è considerata come una possibile realizzazione del processo stocastico, che rappresenta il fenomeno osservato. Se i parametri statistici che descrivono la serie temporale sono indipendenti dall'origine considerata, si dice che il processo è *stazionario*. Il momento del primo ordine della serie temporale è la media, che è una costante e può essere assunta senza alcuna perdita di generalità. Il momento del secondo ordine è la *covarianza*, che divisa per la *varianza* (anche questa è una costante), dà la *correlazione*, che esprime la dipendenza fra diverse osservazioni di uno stesso fenomeno. Questa dipendenza può essere espressa mediante un *modello autoregressivo*, che rappresenta l'osservazione attuale come la somma di due componenti scorrelate, una dipendente dalle precedenti, l'altra da una o più sequenze indipendenti. Nei modelli considerati in questo lavoro, le sequenze indipendenti sono le serie temporali della eccitazione del sistema e degli ingressi non controllati (rumore).

ciò non avrebbe consentito di effettuare le misure nell'intervallo di tempo fra treni successivi. Le sollecitazioni sono state pertanto fornite impartendo una forza impulsiva su diversi punti della rotaia mediante un martello strumentato con cella di carico. Con le dovute precauzioni, si può peraltro affermare che l'eccitazione impartita dal martello è analoga alle forze dovute al rotolamento, che sono da imputare alla sequenza di urti dovuti alla rugosità dei profili delle superfici in contatto di ruota e rotaia.

La cella di carico del martello strumentato è stata attrezzata con una punta sufficientemente rigida da poter considerare piatto l'autospettro dell'eccitazione fino a 5 kHz. Per lo stesso motivo non si è fatto ricorso all'applicazione di masse aggiuntive al martello per aumentare l'entità delle forze in gioco; ciò nonostante con tale configurazione si hanno valori di picco della forza di 5000 N (fig. 1). Questo valore potrebbe sembrare inadeguato rispetto al tipico carico per asse (10÷20 tonnellate); si ricordi tuttavia che il peso comporta una sollecitazione statica della rotaia, mentre ai fini della modellazione interessa il comportamento dinamico del sistema. Secondo la stima effettuata da Ten Wolde e Van Ruiten [4] le forze verticali che si scambiano ruota e rotaia, per velocità comprese fra 80 e 120 km/h, sfiorano appena i 5000 N. Al fine di ricostruire le forze di contatto, l'aver caratterizzato il binario con forze della stessa entità di quelle reali limita gli errori dovuti ad un eventuale non linearità della risposta del sistema. Per le considerazioni esposte in precedenza riguardo alla regolarità dell'esercizio, non è stato possibile effettuare le misure con un carico statico (peso) applicato al binario, tale da riprodurre fedelmente la situazione che si viene ad avere durante il passaggio del treno.

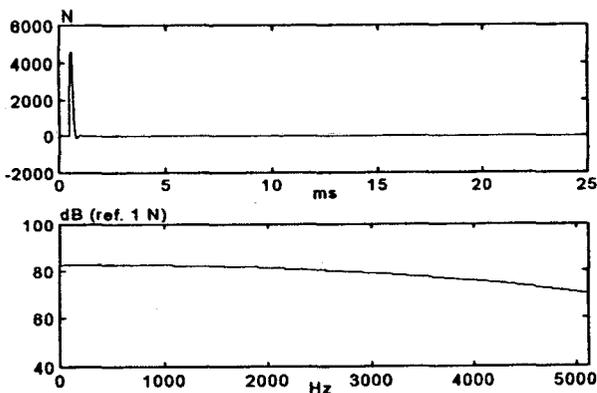


Fig. 1 - Storia temporale (in alto) ed ampiezza dello spettro di una eccitazione impulsiva. L'asse dei tempi è limitato a 512 campioni, mentre l'acquisizione completa dura 2047 campioni.

Questa limitazione, che comporta un errore dovuto alla non linearità del sistema, potrà essere facilmente superata in futuro effettuando le misure su una sezione di binario su cui stazioni una vettura e/o una locomotiva.

Affinché il modello sia efficace in tutto il campo di

frequenze definito, è necessario che i segnali di input/output usati per la sua costruzione siano il più possibile generici, ovvero forniscano le maggiori informazioni. L'eccitazione impulsiva, a larga banda, risulta particolarmente adatta allo scopo in quanto copre l'intero campo di frequenze. Eventuali carenze di segnale in uscita, comunque riscontrabili sperimentalmente, sono quindi da imputare all'effettivo comportamento del sistema e non ad una eccitazione insufficiente.

Per la misura della risposta del sistema, una sezione di rotaia posta a 120 mm dall'asse della traversa più vicina è stata strumentata con accelerometri piezoelettrici. La scelta deriva dalla constatazione, derivante dalle evidenze sperimentali riscontrate in precedenti campagne di misura, che le sezioni in corrispondenza della traversa e della mezzeria fra due traverse non forniscono informazioni sufficienti. Infatti, considerando che a circa 1 kHz si ha la prima frequenza flessionale della rotaia (la cosiddetta *pinned-pinned resonance*) con i nodi nelle traverse ed i ventri a metà campata, sulla traversa si ha carenza di segnale in cui diventa dominante il contributo del rumore, mentre in mezzeria la risonanza ha ampiezza tale da saturare la dinamica del sistema di misura anche nel restante campo di frequenze.

È noto dalla letteratura [2] che per frequenze superiori ad 1 kHz la sezione della rotaia si deforma considerevolmente. Per poterne apprezzare le deformazioni, la sezione strumentata è stata dotata di sei accelerometri monoassiali, con elettronica ICP integrata, di massa 10 grammi e con risposta in frequenza adeguata fino a 10 kHz (fig. 2). Il montaggio con colle cianoacriliche e l'interposizione di mica per garantire l'isolamento elettrico è sufficientemente rigido da determinare una frequenza di risonanza degli accelerometri montati superiore al campo di frequenze analizzato.

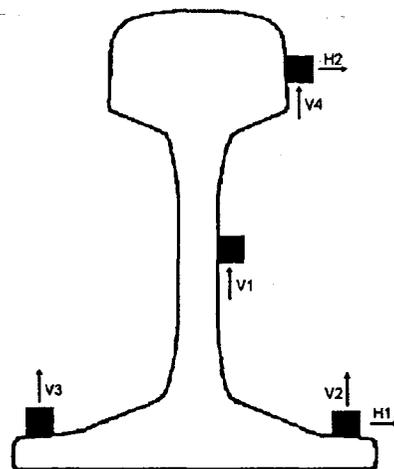


Fig. 2 - Accelerometri monoassiali montati in direzione verticale (V) ed orizzontale (H) sulla sezione strumentata. Solo le accelerazioni verticali sono considerate come uscite del modello.

L'eccitazione è stata impartita in 30 sezioni come mostrato in fig. 3, su una griglia più fitta in prossimità della sezione di misura della risposta, in modo da realizzare una descrizione molto dettagliata del comportamento in frequenza della rotaia nelle prime due campate. Per le restanti cinque si è ritenuta sufficiente la misura della risposta ad eccitazioni in punti particolarmente caratteristici, vale a dire sopra traversa ed in mezzera fra due traverse. Com'è noto il binario è un sistema fortemente smorzato: la rotaia, per sua natura infinita, costituisce una guida d'onda in cui le onde elastiche si propagano disperdendosi parzialmente nel terreno attraverso i supporti; ne segue che, con l'aumentare della distanza del punto di applicazione della forza la risposta risulta sempre più attenuata, con valori di attenuazione di 0.5 ± 3 dB/m [3] in funzione della frequenza considerata e del tipo di armamento.

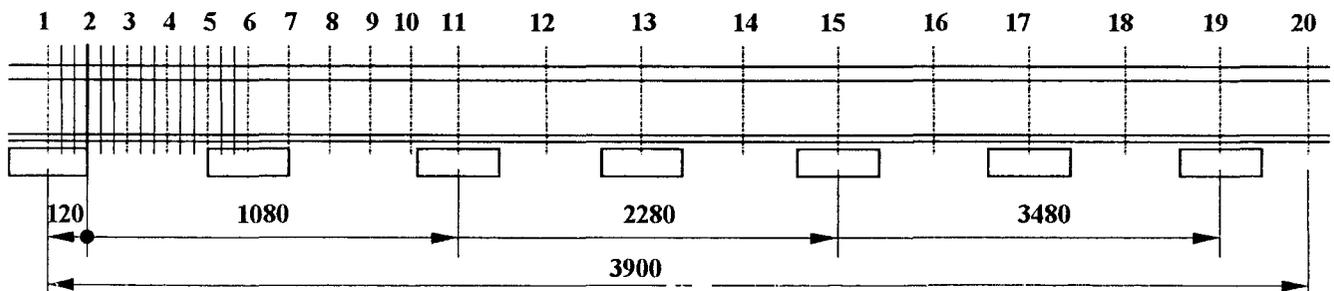


Fig. 3 - Tratta di binario analizzata. Le misure sono state effettuate applicando la forza in tutte le sezioni indicate ma, dato che la variazione è molto piccola per sezioni molto vicine, solo le sezioni numerate sono state utilizzate per la costruzione del modello. Gli accelerometri sono stati montati nella sezione 2 (linea spessa) come mostrato in fig. 2. Le sezioni utilizzate per la valutazione del ritardo nella risposta sono le numero 2, 11, 15 e 19, per le quali vengono indicate le distanze. La sezione 6 è stata utilizzata per il confronto fra le FRF misurate e ricostruite.

La forza è stata impartita verticalmente sulla testa della rotaia nelle sezioni sopra indicate; cinque misure sono state ripetute per ciascun punto di eccitazione.

Le misure sono state eseguite per mezzo di un PC dotato di scheda di acquisizione National Instrument e comandato con un *Virtual Instrument* realizzato allo scopo con Lab VIEW. Per ciascun canale si è definito il guadagno ottimale in modo da sfruttare interamente la dinamica del convertitore A/D (12 bits, pari a 72 dB); la frequenza di campionamento è di 20480 Hz.

4. Il modello ARARMAX del binario

L'identificazione di un sistema consta di quattro passi fondamentali:

- i) raccolta dati sperimentali;
- ii) scelta del tipo (struttura) di modello;
- iii) stima dei parametri del modello;
- iv) validazione del modello.

Il primo punto è stato descritto in dettaglio nella sezione precedente. Il passo successivo è particolarmente critico, in quanto la scelta di una struttura non adeguata a rappresentare il sistema da modellare compromette inesorabilmente la riuscita del processo di identificazione. Non esistono regole direttamente applicabili in base alle quali operare la giusta scelta, per cui in questa fase è l'esperienza a guidare l'analista.

Successivamente, di tutti i possibili modelli riconducibili alla struttura selezionata, si definisce il migliore a partire dai dati sperimentali. Il confronto fra i modelli in esame viene effettuato valutando in che misura essi riescono a riprodurre i segnali misurati. I criteri di confronto possono seguire procedure anche notevolmente diverse fra loro; in questo lavoro per la costruzione del modello si è fatto uso delle librerie contenute nel Matlab Identification Toolbox [5]. La stima dei parametri del modello viene

realizzata secondo il *prediction error method* che iterativamente riduce l'errore ai minimi quadrati commesso nella rappresentazione del comportamento del sistema.

È opportuno osservare che la terza fase porta in ogni caso ad un risultato: compito dell'analista è quello di individuare, sulla base di opportuni criteri di valutazione, il miglior modello fra quelli presi in esame. L'operazione di validazione (iv) deve pertanto essere condotta con estrema attenzione al fine di stabilire se il modello sia realmente in grado di espletare i compiti per cui è stato costruito.

Diverse sono le cause che possono determinare la scarsa validità di un modello [6]:

- è fallita la procedura numerica per la determinazione del miglior modello secondo il criterio adottato;
- il criterio utilizzato per il confronto fra i modelli non è adatto;
- la struttura del modello non è adeguata, vale a dire che non è in grado di fornire una descrizione sufficientemente buona del sistema;
- i segnali usati nella definizione del modello ottimale

non contengono informazioni sufficienti.

La maggior parte del lavoro di messa a punto di un modello consiste proprio nel trovare una soluzione a questi problemi, realizzando il cosiddetto "System Identification Loop".

Non tutti i dati raccolti durante la campagna di misure sono stati utilizzati all'atto della modellazione: come già detto si è limitato lo studio alla dinamica verticale del binario (accelerometri V1+V4).

L'analisi delle risposte in frequenza sperimentali ha permesso di constatare che la discretizzazione in quindici elementi della prima campata è inutilmente fine e risulta sufficiente limitare a 20 il numero di ingressi considerato (fig. 3).

Per la stima dei parametri del modello bisogna fornire all'algoritmo un esempio del comportamento dinamico del sistema. Allo scopo si sono utilizzate le serie temporali relative all'applicazione della forza impulsiva ai diversi ingressi del sistema ed alle corrispondenti risposte.

Delle cinque misure realizzate per ciascuna sezione di eccitazione solo quattro sono state impiegate per la costruzione del modello in modo da poter disporre di una coppia di segnali di input/output per la validazione.

Per la modellazione del binario si è deciso di utilizzare una struttura che nella sua forma più generica esprime il legame fra i segnali in ingresso ed in uscita secondo la relazione⁽²⁾.

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (1)$$

relativa al sistema mostrato in fig. 4. La *time history* $y(t)$ è il vettore dei segnali in uscita dal sistema, $u(t)$ è il vettore dei segnali in ingresso al sistema, $e(t)$ è il vettore degli ingressi non controllati, misurabili e non (rumore), di dimensioni pari al numero di uscite, q è l'operatore di *shift* per cui vale la generica relazione

$$q u(t) = u(t+\Delta t),$$

ed infine $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$, $F(q)$ sono polinomi nel fattore di ritardo q^{-1} (si veda oltre).

Le ipotesi da rispettare perché possa essere applicata questa procedura di modellazione sono le seguenti:

- i. il sistema è lineare;
- ii. il sistema è invariante nel tempo, almeno per un certo periodo che dipende dalle finalità della modellazione;
- iii. gli ingressi sono essenzialmente deterministici;
- iv. gli ingressi non controllati ed in generale tutti i disturbi possono essere descritti come variabili aleatorie.

Una conseguenza immediata dei punti iii. e iv. è che in

⁽²⁾ Per una breve descrizione si veda [1]; i testi di base [6, 7] possono fornire informazioni più complete.

uscita si hanno processi stocastici con componenti deterministici.

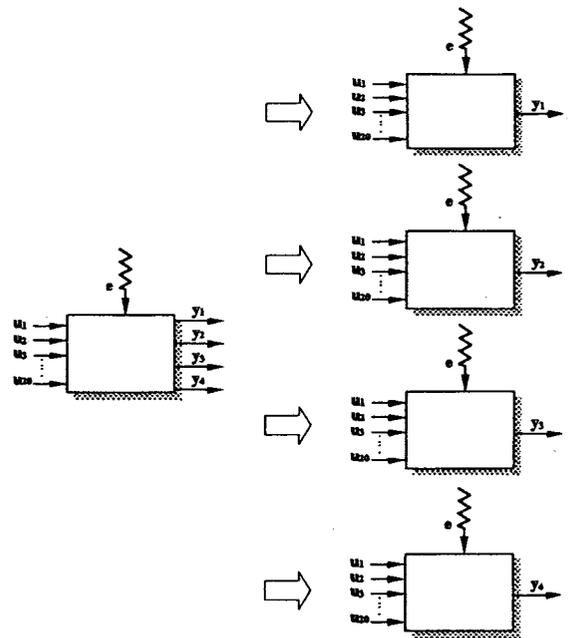


Fig. 4 – Sistema MIMO (a sinistra) e rappresentazione equivalente di 4 sistemi MISO (a destra).

L'ipotesi di linearità è chiaramente un'idealizzazione del comportamento del sistema, anche se le notevoli semplificazioni che derivano dalla sua introduzione ne giustificano ampiamente l'adozione; inoltre, i risultati che si ottengono sono comunque di buona qualità. Le restanti ipotesi sono effettivamente soddisfatte dal sistema considerato.

La (1) rappresenta una famiglia di possibili strutture che si ottengono eliminando uno o più polinomi e che hanno caratteristiche anche molto differenti fra loro. Per la scelta della struttura idonea alla modellazione del binario è opportuno ricordare che, dalla teoria dei sistemi, è noto che per un qualsiasi sistema meccanico i poli della funzione di trasferimento non cambiano al variare dell'ingresso considerato, ma solo dell'uscita. Questa caratteristica si traduce nel fatto che la matrice $F(q)$ è la matrice identità, vale a dire può essere omessa. La struttura risultante prende il nome di modello ARARMAX (*Auto Regressive Moving Average with eXternal input*).

Non si possono semplificare, invece, le matrici $C(q)$ e $D(q)$, in quanto $e(t)$ è un rumore bianco introdotto per tenere conto del contributo degli ingressi non controllati: le accelerazioni misurate sono contaminate da disturbi elettromagnetici, correnti di binario, ecc. È ovvio che i poli e gli zeri dovuti alle forze di impatto poco hanno a che vedere con quelli legati ai disturbi. A conferma di quanto asserito si sono realizzate modellazioni anche con struttu-

re più semplici quali ARX (nella quale compaiono solo i polinomi $A(q)$ e $B(q)$) o ARMAX (nella quale compaiono i polinomi $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$), ma con risultati complessivamente meno soddisfacenti (ricordiamo che in [1] il modello ARMAX era invece risultato sufficiente per modellare la semplice trave ivi utilizzata).

Il sistema considerato ha 20 ingressi e 4 uscite (MIMO - Multiple Input Multiple Output). Per quanto detto sopra, l'assenza di legami fra i parametri che definiscono le funzioni di trasferimento di output diversi, consente di ridurre il problema alla costruzione di quattro modelli di sistema MISO (Multiple Input Single Output) con 20 ingressi ed una sola uscita. In un generico sistema MISO con nu ingressi l'equazione (1) è scalare ed $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ sono polinomi in q^{-1} :

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q) = b_1q^{-nk} + b_2q^{-nk-1} + \dots + b_{nb}q^{-nk-nb+1}$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

in cui i coefficienti a_i , c_i e d_i sono scalari, mentre i coefficienti b_i sono vettori $1 \times nu$; a ciascun ingresso è associato un ritardo nk , cioè il minimo numero di campioni che intercorrono fra l'inizio dell'eccitazione e l'inizio della relativa risposta.

Per la costruzione del modello è necessario innanzi tutto definire il numero di parametri che si intende utilizzare, ovvero il valore di na , nb , nc , nd . Come si evince dalla (1), questa operazione equivale a definire il numero di poli e di zeri del sistema sia relativamente agli ingressi misurati, sia a quelli non controllati. In prima battuta si può operare esaminando la funzione di trasferimento sperimentale del sistema; successivamente l'analista ha il compito di incrementare o diminuire il numero di parametri in funzione della maggiore o minore complessità del sistema.

Devono inoltre essere definiti i ritardi associati a ciascuna coppia di ingressi/uscite. Per un sistema meccanico quale quello modellato in questo lavoro, l'entità del ritardo può essere valutata considerando il significato fisico di tale parametro ovvero il numero di periodi di campionamento che intercorrono fra l'applicazione della forza e la relativa uscita. Conoscendo la velocità di propagazione delle onde elastiche nell'acciaio e la distanza fra il punto di applicazione dell'eccitazione ed il punto di misura della risposta, si ricava un valore del ritardo che in genere risulta ottimale almeno per le sezioni più vicine. All'aumentare della distanza il ritardo reale risulta essere maggiore di quello teorico presumibilmente per via del fatto che l'eccitazione ad impatto verticale determina la propagazione di onde elastiche che subiscono numerose riflessioni sulla superficie esterna della rotaia; il percorso effettivo pertanto risulta essere più lungo della retta di minima distanza. Una conferma può essere ottenuta dall'esame visivo delle serie temporali dei dati sperimentali

utilizzati per la costruzione del modello: i segnali relativi ad una eccitazione ad impatto ed alla corrispondente risposta consentono di valutare agevolmente la distanza temporale fra il picco dell'ingresso e l'inizio dell'oscillazione nell'uscita (fig. 5).

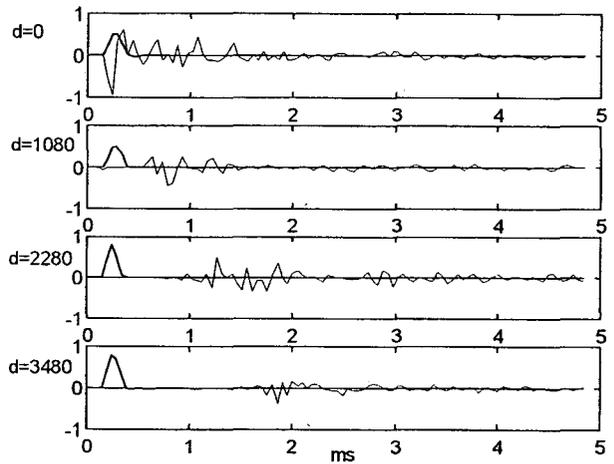


Fig. 5 - Ritardi tra ingresso ed uscita nelle sezioni 2, 11, 15 e 19. L'accelerazione (linea sottile) misurata in V1 inizia ad esistere ad un istante che è più che proporzionale con la distanza fra la sezione di misura e la sezione di applicazione della forza (indicata con linea spessa). La distanza è indicata per ciascuna sezione. Le ampiezze dei segnali sono state normalizzate per facilitare il confronto.

Il modello sviluppato in questo lavoro è adatto a rappresentare il comportamento del binario fino a 5 kHz. L'estensione a frequenze più elevate è possibile compatibilmente con la validità dei dati sperimentali. In generale il prezzo da pagare è l'aumento del numero di parametri del modello con conseguente allungamento dei tempi macchina per la stima dei coefficienti polinomiali. Per superare questo limite si possono filtrare i segnali di input/output in modo da suddividere il campo di frequenze che si vuole analizzare; si costruiscono così diversi modelli i cui poli e zeri possono essere combinati insieme in modo da ottenere i parametri del modello completo del sistema. Il filtraggio numerico dei segnali non deve in nessun caso introdurre distorsioni di fase che comprometterebbero inesorabilmente la possibilità di operare direttamente con le serie temporali.

Il modello ottenuto è costituito da un totale di 4548 parametri per la rappresentazione del trasferimento degli ingressi misurati in uscite e da 200 parametri per la descrizione dell'effetto degli ingressi non controllati (tab. 1). Si tratta di valori estremamente ridotti in considerazione del numero di informazioni rappresentate dal modello. Per confronto si consideri che un modello equivalente, basato sulle 80 FRF che descrivono il legame fra i 20 ingressi e le 4 uscite, con risoluzione spettrale di 800 linee, richiederebbe 64000 numeri complessi, vale a dire 128000 parametri.

TABELLA 1

NUMERO DEI PARAMETRI UTILIZZATI PER LA COSTRUZIONE DEL MODELLO ARARMAX

Output	V1	V2	V3	V4
na	54	58	60	54
nb-input 01	52	56	58	52
nb-input 02	52	56	58	50
nb-input 03	52	56	58	50
nb-input 04	52	56	58	52
nb-input 05	50	56	58	50
nb-input 06	52	56	58	50
nb-input 07	50	56	58	50
nb-input 08	50	56	58	50
nb-input 09	50	56	58	50
nb-input 10	52	56	58	50
nb-input 11	52	56	58	52
nb-input 12	52	56	58	50
nb-input 13	52	56	58	52
nb-input 14	50	56	58	52
nb-input 15	50	56	58	50
nb-input 16	52	56	58	50
nb-input 17	52	56	58	50
nb-input 18	52	56	58	52
nb-input 19	52	56	58	52
nb-input 20	50	56	58	52
nc	5	5	5	5
nd	5	5	5	5

5. Validazione del modello ARARMAX

Il modello del binario è stato sottoposto ad un approfondito processo di validazione che si è articolato in diverse fasi.

1. Verifica della capacità di simulare il comportamento dinamico del sistema sottoposto ad un'eccitazione non utilizzata per la costruzione del modello stesso (fig. 6). Questa verifica può essere ritenuta sufficientemente efficace, sebbene per rendere realmente probante questo test

sarebbe preferibile usare misure realizzate con un'eccitazione di tipo differente da quella utilizzata per la stima dei parametri del modello (ad esempio utilizzando uno shaker).

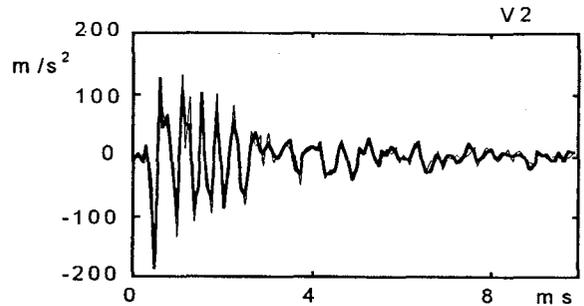


Fig. 6 - Simulazione mediante il modello della risposta del binario ad un'eccitazione verticale impulsiva non utilizzata per la stima dei parametri del modello. Confronto fra le accelerazioni misurate in V2 (linea spessa) e la risposta predetta dal modello ARARMAX (linea sottile).

2. Confronto fra la risposta in frequenza sperimentale del binario e quella del modello (fig. 7). La ricostruzione della fase è particolarmente fedele; solo alcune modulazioni dell'ampiezza non vengono rappresentate adeguatamente. Questo limite complessivamente trascurabile può essere superato aumentando il numero di parametri del modello. Di contro la funzione di trasferimento associata al modello non presenta le irregolarità tipiche delle FRF sperimentali: mentre tutti i parametri del modello contribuiscono globalmente alla definizione della risposta in frequenza, nelle curve sperimentali ogni linea in frequenza è del tutto indipendente dalle adiacenti; nelle zone in cui il segnale è carente e risulta significativo il contributo del rumore, la stima della funzione di trasferimento è inevitabilmente affetta da errore e non vengono utilizzate le informazioni nelle linee adiacenti che al contrario sono particolarmente significative soprattutto nei sistemi fortemente smorzati.

3. Analisi della stabilità del modello per prevenire problemi di divergenza nelle simulazioni. Può essere effettuata verificando che i poli della funzione di trasferimento, determinati come radici del polinomio $A(q)$, siano contenuti all'interno del cerchio unitario sul piano zeta (fig. 8).

4. Verifica che l'ordine del modello non sia troppo elevato (numero di parametri eccessivamente alto). L'esame dei poli e degli zeri del modello consente una rapida verifica: se nell'intorno di un qualsiasi polo della funzione di trasferimento sono presenti uno o più zeri per ciascun ingresso si ha una reciproca cancellazione per cui si può ridurre il numero di parametri del modello senza modificare sostanzialmente la risposta in frequenza, ma al più smussandone una ondulazione. Analogamente è lecito sostituire poli/zeri particolarmente vicini fra loro con uno solo che ne faccia le veci.

5. Stima dell'indeterminazione del modello. A ciascun

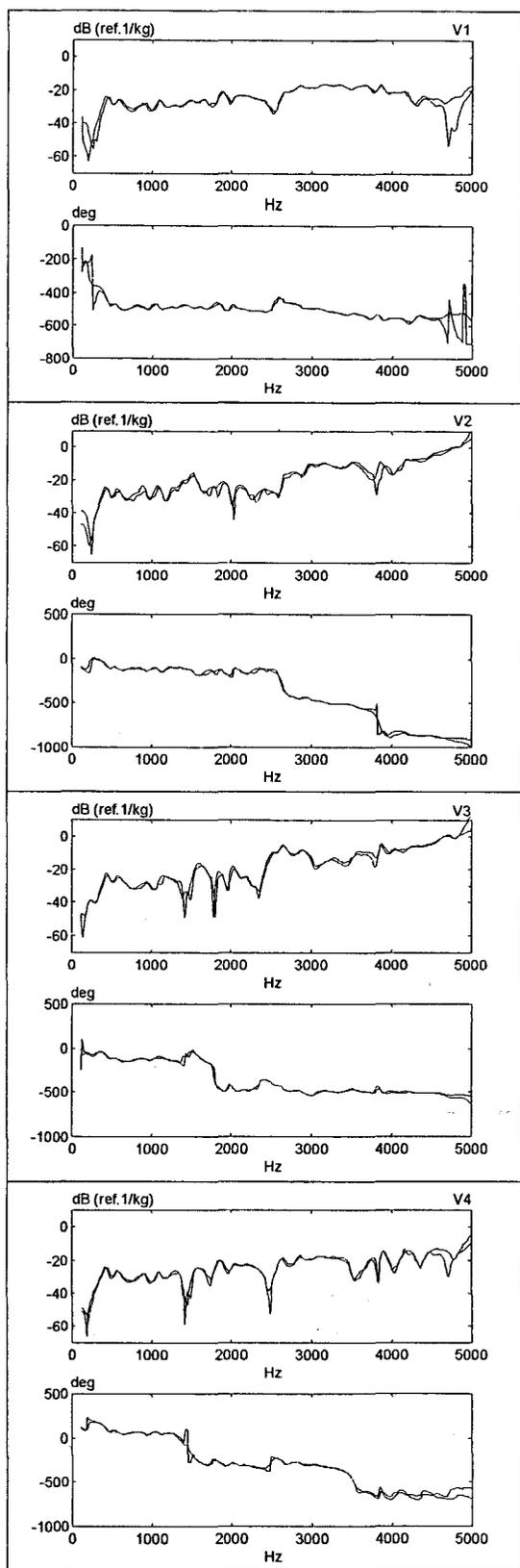


Fig. 7 - Confronto fra alcune FRF misurate (linea spessa) e ricostruite (linea sottile) per le quattro uscite utilizzate. L'input è impartito sulla sezione strumentata n. 2.

parametro di un modello della forma (1) è associato un certo grado di indeterminazione che di solito viene espresso dagli algoritmi di stima dei parametri in termini di

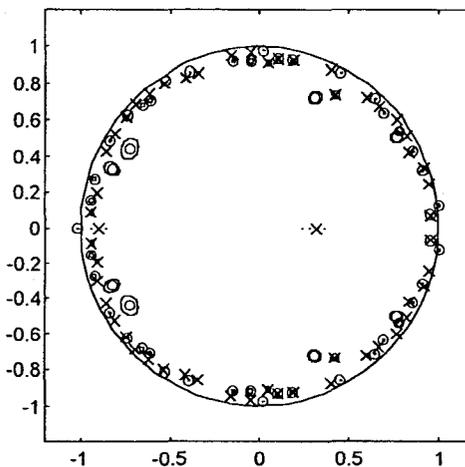


Fig. 8 - Rappresentazione sul piano Z dei poli (x) e degli zeri (o) della FRF puntuale H_{ij} . Le regioni di confidenza corrispondenti ad una deviazione standard sono indicate con ellissi (linea sottile) che possono peraltro essere anche più piccole del simbolo "o".

scarto quadratico medio. Per mezzo di questo si può verificare se l'incertezza relativa è tale da invalidare il modello stesso. A questo scopo si sono effettuate diverse verifiche sostanzialmente equivalenti fra loro:

- i. esame numerico diretto dell'incertezza relativa; è la prova più immediata e facilmente implementabile, tuttavia risulta difficile apprezzare l'effetto degli eventuali parametri "incerti";
- ii. analisi di sensibilità della risposta simulata in presenza di una qualsiasi eccitazione reale o fittizia: si simula il comportamento del binario facendo variare casualmente i valori dei parametri del modello all'interno di un intervallo di confidenza di raggio pari ad una deviazione standard; in fig. 9 è rappresentato un esempio di questo tipo di analisi;
- iii. analisi di sensibilità della funzione di trasferimento del modello al variare dei parametri nell'intervallo definito da una deviazione standard; anche questa verifica è particolarmente significativa perché risulta facilmente apprezzabile l'effetto dell'incertezza globale sui parametri stimati (fig. 10);
- iv. analisi di sensibilità dei poli e degli zeri del modello: si visualizzano sul piano zeta le zone di confidenza corrispondenti ad una deviazione standard intorno a ciascun polo/zero (fig. 8).

6. Utilizzo del modello per stimare l'effetto di ingressi non controllati sulla risposta del sistema. Si conducono simulazioni sovrapponendo un rumore bianco alle forze in ingresso. Se la risposta risulta fortemente condizionata

dalla presenza del disturbo si ha che è impossibile attribuire l'uscita del sistema esclusivamente agli ingressi misurati e di conseguenza il modello stesso viene a perdere di significato perché i dati sperimentali utilizzati per la sua costruzione sono stati presumibilmente male interpretati (fig. 11).

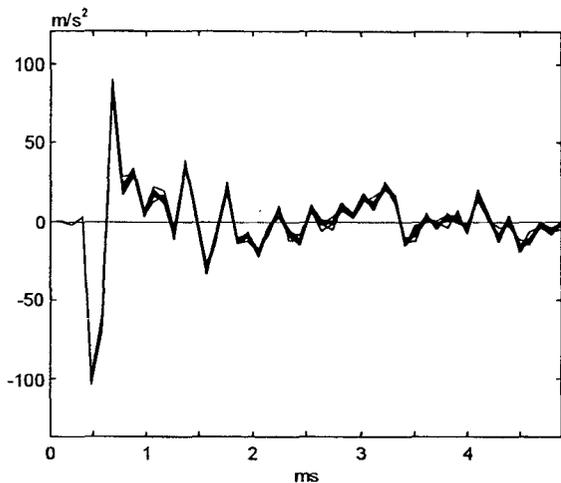


Fig. 9 – Simulazione della risposta V1 sotto un carico impulsivo verticale sulla sezione di misura n. 2 effettuata con differenti modelli ottenuti facendo variare in maniera casuale, all'interno di un intervallo di confidenza $\pm\sigma$, i parametri del modello ARARMAX.

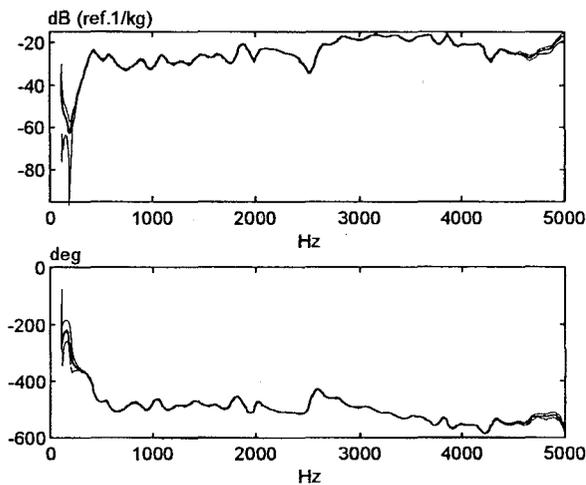


Fig. 10 – Ampiezza e fase della FRF puntuale H_{v1} (linea spessa) ed incertezza variando i parametri nel range $\pm\sigma$ (linee sottili).

6. Confronto con i modelli tradizionali

Di particolare interesse pratico per il progettista è l'applicabilità delle tecniche di modellazione numerica per la previsione del comportamento dinamico di una qualsiasi struttura.

Il modello illustrato nel presente lavoro non ha, purtroppo, alcuna rappresentazione nell'usuale forma di parametri concentrati massa-molla-smorzatore, che sono

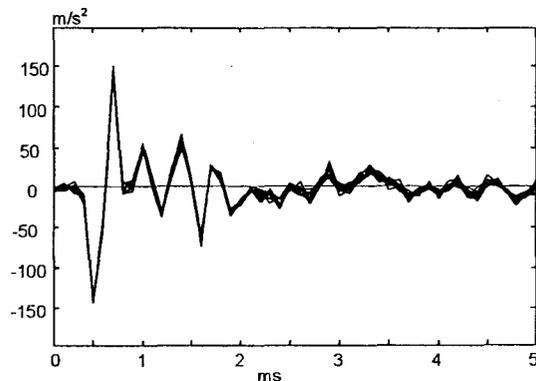


Fig. 11 – Simulazione della risposta del binario V1 sotto un carico impulsivo verticale sulla sezione di misura n. 2 sovrapposto ad un rumore bianco che agisce come un ingresso non controllato. I parametri del modello variano in modo random nell'intervallo di confidenza $\pm\sigma$.

poi i parametri elastici ed inerziali del binario. Gli autori sono ben consci che questa limitazione, assai pesante, impedisce di fatto la predizione a calcolo del comportamento del binario alle alte frequenze, per cui risulta impossibile predire l'effetto sul comportamento del sistema al variare di qualcuno dei parametri suddetti. D'altronde i modelli a parametri concentrati sono assolutamente inutilizzabili alle frequenze più alte, alle quali, qualunque schematizzazione "tradizionale", anche la più complessa, non riesce a tener conto in maniera compiuta del comportamento reale del binario, che ha smorzamenti elevati, si comporta come una guida d'onda e nel quale la propagazione delle onde elastiche risulta decisamente complessa.

La limitazione "progettuale" può essere superata dall'osservazione di numerosi tipi di binario: se tests del tipo di quelli descritti venissero effettuati su numerosi tipi di binario, i parametri ottenuti da queste caratterizzazioni potrebbero suggerire una dipendenza dai tradizionali parametri di modellazione. Si tenga presente che la strumentazione del binario e la raccolta dei dati necessari comportano un impegno della linea di circa due ore, che è quindi assolutamente compatibile perfino con gli usuali intervalli previsti per la manutenzione ordinaria. La costruzione del modello richiede tempi di calcolo, almeno con il tipo di modello e con il numero di parametri scelti, richiede tempi decisamente compatibili con mezzi di calcolo a basso costo (qualche ora su PC di fascia bassa).

È peraltro opinione degli autori che l'estrema flessibilità e potenza del metodo sia tale da evidenziare notevoli differenze anche in sezioni nominalmente identiche poste anche a breve distanza, quanto meno alle frequenze più alte. Nondimeno un'analisi estensiva si rivelerebbe decisiva.

mente utile non fosse altro che per conferire una validazione in termini statistici dei comportamenti osservati.

7. Conclusioni e sviluppi

Nella presente ricerca è stata sviluppata l'intera procedura per la costruzione di un modello di binario ferroviario attraverso le tecniche dell'Identificazione di Sistemi, a partire dall'attività sperimentale fino alla validazione del modello stesso. La tecnica utilizzata è del tutto generale, tant'è che viene normalmente utilizzata per identificare il comportamento di un sistema elettronico eccitandolo con un impulso di tensione; inoltre la generalità è assicurata dal fatto che non si fanno ipotesi sulle caratteristiche fisiche peculiari del sistema ma solo su alcune proprietà generali del suo comportamento. Relativamente ad una di esse, cioè la linearità, lo studio effettuato con binario scarico identifica il sistema binario con uno sviluppo del primo ordine intorno all'origine della curva di rigidità del binario. È noto in letteratura che il comportamento del binario non è lineare ma tende ad irrigidirsi all'aumentare del carico (*strain stiffening*) e ad aumentare lo smorzamento (l'energia impartita al binario può disperdersi anche attraverso le ruote che lo caricano). La presenza di un carico statico sul binario, che peraltro non modifica assolutamente la procedura di costruzione del modello, consentirebbe di identificare parametri nell'intorno del punto di lavoro istantaneo del sistema; i parametri relativi al comportamento ad alta frequenza dovrebbero peraltro risentire abbastanza poco di eventuali precarichi.

È stato realizzato un modello ARARMAX atto a rappresentare la dinamica verticale di un tratto di binario di circa 4 m fino a 5 kHz. Le caratteristiche del modello sono state ottimizzate per l'utilizzo all'interno di un algoritmo di ricostruzione delle forze di contatto ruota-rotaia secondo le tecniche descritte in [1]. Con procedure del tutto analoghe è possibile estendere il modello alla dinamica orizzontale del sistema, aumentare le dimensioni del tratto di binario considerato, variare il campo di frequenza, e così via.

Eventuali limitazioni possono derivare principalmente dalla carenza di dati sperimentali idonei alla descrizione del comportamento dinamico del sistema, dato che le risorse di calcolo richieste sono comunque modeste.

Rispetto ad altri approcci reperiti in letteratura, quello seguito in questo lavoro ha il pregio di non introdurre schematizzazioni sul comportamento del sistema: i dati sperimentali garantiscono la totale attinenza alla realtà. Contemporaneamente il modello ARARMAX non presenta i limiti di una semplice misura della risposta in frequenza del sistema, ma al contrario si presta ad essere utilizzato in diverse applicazioni.

La simulazione del comportamento del sistema sottoposto ad un qualsiasi numero e tipo di forze viene realizzata in tempi molto rapidi in quanto la stima dell'uscita è il risultato di una semplice somma di prodotti. I segnali vengono elaborati direttamente nel dominio del tempo e

non si ricorre all'utilizzo della trasformata inversa di FOURIER che è tipicamente fonte di errori numerici. Inoltre è immediata anche la stima dell'incertezza della simulazione, nonché l'effetto di disturbi sull'uscita.

La funzione di trasferimento del modello non solo segue fedelmente l'andamento di quella di origine sperimentale sia in termini di ampiezza che di fase, ma anzi risulta più robusta nelle zone in cui è carente la risposta del sistema e dove tipicamente è bassa la coerenza della risposta in frequenza misurata. Infine, la modellazione non risulta più complessa in presenza di sistemi fortemente smorzati.

Quali sviluppi delle tecniche illustrate, è prevista a breve termine l'esecuzione di una campagna sperimentale *ad hoc* per la validazione complessiva della procedura di ricostruzione; inoltre è in fase avanzata di sviluppo una procedura semplificata, parzialmente alternativa ad HF-MIRA, che utilizza estensivamente il modello qui sviluppato.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare il personale FS che ha gentilmente fornito l'accesso alla linea ferroviaria. Ricerca parzialmente finanziata con fondi MURST e CNR.

SIMBOLOGIA

$A(q), \dots, F(q)$	polinomi per la descrizione del modello del sistema
q	operatore di <i>shift</i>
nu	numero di uscite del sistema
nk	numero di campioni associato al ritardo per ogni ingresso
na, nb, nc, nd	numero dei parametri dei polinomi $A(q)$, (q) , $C(q)$ e $D(q)$
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MISO	Multiple Input Single Output
σ	intervallo di confidenza di ciascun parametro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BRACCIALI, G. CASCINI, *HF-MIRA: un algoritmo per la ricostruzione delle forze di contatto ruota-rotaia ad alta frequenza*, pubblicato su *Ingegneria Ferroviaria*, n. 11/1998.
- [2] K.L. KNOTHE, S.L. GRASSIE, *Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies*, *Vehicle System Dynamics* 22, 1993, 209-262.
- [3] D.J. THOMPSON, *Wheel-rail noise: theoretical modelling*

- of the generation of vibration, Ph. D. Thesis, University of Southampton, 1990.
- [4] T. TEN WOLDE, C.J.M. VON RUITEN, *Sources and Mechanisms of Wheel/Rail Noise: State of the Art and Recent Research*, Journal of Sound and Vibration 87(2), 1983, 147-160.
- [5] *Matlab System Identification Toolbox Guide*, Natick, MA: The Mathworks Inc., 1992.
- [6] L. LJUNG, *System Identification: Theory and Practice*, Letchworth, England: Research Studies Press, 1987.
- [7] M. PANDIT and S.M. WU, *Time Series and System Analysis with Applications*, New York: John Wiley and Sons, 1983.
- [8] P.J. REMINGTON, *Wheel/Rail Noise - Part I: Characterization of the Wheel/Rail Dynamic System*, Journal of Sound and Vibration 46(3), 1976, 359-379.

Sommaire

UN MODELE POUR LA REPRESENTATION DE LA DYNAMIQUE VERTICALE D'UNE VOIE FERROVIAIRE A HAUTES FREQUENCES

Dans ce travail on aborde le modelage du comportement vertical d'une section de ligne ferroviaire sous excitation verticale. La méthode de modelage utilisée permet de décrire le comportement de la voie jusqu'à 5 kHz, typique par exemple des analyses dans le domaine acoustique, en utilisant un nombre de paramètres décidément réduit. On décrit la campagne d'essais pour l'acquisition des réponses expérimentales de la voie, le choix du modèle optimal, le modelage effectué par des techniques d'analyse des signaux dans la domination du temps et la validation du modèle lui-même par l'indication de la fiabilité statistique des résultats. On décrit finalement les applications et les développements qui peuvent descendre du modèle ici présenté.

Summary

A MODEL FOR HIGH FREQUENCY REPRESENTATION OF THE RAILWAY TRACK VERTICAL DYNAMIC

The present work proposes the modelling of the vertical behaviour of a railway line section under a vertical excitation. The utilized modelling method makes it possible to describe the track behaviour up to 5 kHz, typical of the sound analysis, and utilizes a definitely small number of parameters. This note describes the test campaign for the acquisition of the track experimental responses, the choice of the optimum model, the modelling achieved by means of signal analysis techniques in the time domain and the validation of the model, showing the statistic reliability of the results as well. The applications and developments that may derive from the above-mentioned model are finally illustrated.

Zusammenfassung

EIN MODELL ZUR DARSTELLUNG DER VERTIKALEN DYNAMIK EINES EISENBAHNGLEISES UNTER HOHEN FREQUENZEN

Die vorliegende Studie befasst sich mit der Modellierung des vertikalen Verhaltens eines vertikal erregten Streckenabschnitts. Die dabei verwendete Methode erlaubt es, das Verhalten des Gleises bis 5 kHz – einem beispielsweise für akustische Analysen typischen Wert – zu beschreiben, wobei nur eine ausgesprochen geringe Anzahl von Parametern verwendet wird. Es werden die Versuchsreihen zur experimentellen Erfassung der Gleisreaktionen, die Auswahl des optimalen Modells, die Modellierung mittels Techniken der Signalauswertung in der Zeitdomäne sowie die Validierung des Modells unter Angabe der statistischen Zuverlässigkeit der Ergebnisse beschrieben. Schliesslich werden auch die Anwendungen und möglichen Entwicklungen des hier vorgestellten Modells dargelegt.