

Soluzione numerica del modello PDE della dinamica verticale di un binario

A. Bracciali, R. Ciuffi, F. Piccioli

*Dipartimento di Meccanica e Tecnologie Industriali – Università di Firenze
v. Santa Marta, 3 – 50139 Firenze
e-mail: bracciali@ing.unifi.it*

Keywords: railway, track, vertical dynamics, simulation

Sommario

Nel presente lavoro viene affrontata la soluzione numerica del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che governano la dinamica verticale di un binario ferroviario. Il modello preso in considerazione, piuttosto semplice in quanto include un solo stadio di sospensione verticale, consente di effettuare numerose simulazioni al variare dei parametri caratteristici del binario stesso.

Al modello del binario, realizzato in ambiente MATLAB, è stato aggiunto un modello semplificato del veicolo, comprendente l'elasticità Hertziana di contatto, la sala e la sospensione primaria, realizzato in ambiente SIMULINK.

Le limitazioni del modello ed i risultati ottenuti sono discussi con particolare riferimento alle condizioni di irregolarità puntuale o distribuita della ruota o della rotaia.

Abstract

In this paper the numerical solution of the system of partial differential equations that describes the vertical dynamics of a railway track is shown. The considered model, that is quite simple as it considers only one stage of vertical suspension, allows simulating numerous conditions varying the track characteristic parameters.

To the track model, developed in the MATLAB environment, a simplified vehicle model developed in the SIMULINK environment has been added, consisting of a single wheel with primary suspension and contact stiffness.

The model limitations and the results are discussed with particular reference to local or distributed rail or wheel irregularities.

1. PREMESSA

La dinamica verticale è un classico argomento per coloro che debbano occuparsi della qualità di marcia di un veicolo ferroviario. È noto, infatti, che un veicolo ferroviario ha come fonte di principale eccitazione verticale l'irregolarità della via, espressa in termini di time history o di spettro di potenza. In ogni caso, anche nel caso ipotetico di via perfetta, essa non può essere considerata immobile sotto l'azione dei carichi verticali ma, al contrario, costituisce un sistema che dal punto di vista della modellazione e del calcolo è relativamente complesso.

Nei riguardi della simulazione, occorre rilevare come la modellistica sia diventata via via più ampia e complessa in funzione dei problemi e dei relativi campi di frequenza di interesse. L'utilità della simulazione della dinamica verticale del sistema elastico accoppiato ruota-rotaia è indubbia: essa consente di indagare problemi complessi di contatto e fornire, potenzialmente, suggerimenti utili al progettista della linea che deve individuare i componenti con il miglior comportamento a livello di progetto. Fra i problemi potenzialmente affrontabili si citano, oltre al comfort di marcia, i fenomeni di formazione dell'usura ondulatoria del binario, il danneggiamento della superficie di rotolamento delle ruote ed, ancora, il comfort di marcia del passeggero.

Dall'analisi dei modelli disponibili in letteratura si evince che il salto di qualità nella modellazione del binario è rappresentato dalla possibilità di descrivere il sistema binario-supporti contemplando la periodicità degli appoggi, sempre presente anche quando si hanno binari posati su piaste in cemento, ottenendo così un modello a parametri concentrati su supporti discreti che rappresenta senza dubbio un'evoluzione rispetto a quelli su posa continua. Sebbene più rispondenti alla realtà, i modelli con supporti periodici sono più complessi in quanto lo spostamento del binario non è più funzione solo della tipologia della forza eccitatrice, ma anche della posizione della forza stessa. Gli strumenti di modellazione messi a punto fino ad oggi per risolvere questa problematica impiegano tecniche tradizionali come i codici agli elementi finiti.

Il modello di binario a supporti discreti descritto nel presente lavoro affronta il problema della soluzione numerica del modello matematico che descrive il sistema nella sua totalità (eccitazione mobile, rotaia, supporti)

mediante algoritmi che impiegano il Partial Differential Equation Toolbox (PDE) di MATLAB. Inizialmente è stato costruito un modello semplice partendo dalla formulazione matematica del binario per poi sviluppare l'eccitazione mobile, rendendola più vicina alla realtà di un veicolo ferroviario, attraverso SIMULINK con il quale il PDE può facilmente essere interfacciato.

2. IL MODELLO MATEMATICO

Non è questa la sede per analizzare criticamente la modellistica disponibile in letteratura sulla dinamica verticale del binario. A tale proposito si rimanda a [1], che tratta estensivamente tale problematica.

Il modello matematico utilizzato nel presente lavoro è quello descritto da Kisilowski [2] che è relativamente semplice e consente di effettuare analisi parametriche ed accoppiate al veicolo in maniera relativamente semplice. La dinamica verticale del binario è esprimibile mediante un'equazione differenziale (1) alle derivate parziali, nelle variabili spazio-tempo, che descrive il sistema costituito dalla rotaia, assimilabile ad una trave di Eulero-Bernoulli, vincolata a terra mediante supporti discontinui, equidistanti tra di loro, schematizzati da una sospensione viscoelastica a parametri concentrati e costanti (fig. 1).

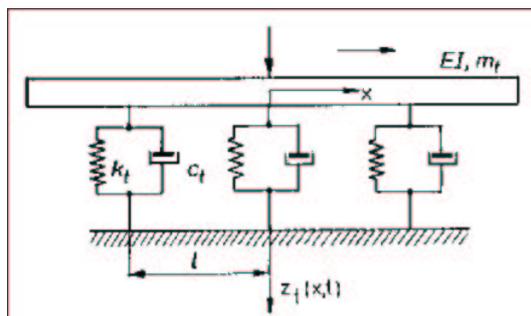


Fig. 1 Modello del binario [2]

$$EI \frac{\partial^4 z_t}{\partial x^4} + m_t \frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} + \left(k_t z_t + c_t \frac{\partial z_t}{\partial t} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl_t) = P \delta(x - vt) \quad (1)$$

Il primo termine a primo membro dell'eq. (1) esprime la reazione derivante dalla rigidezza flessionale della rotaia, il secondo costituisce la componente inerziale, il terzo rappresenta la reazione visco-elastica degli appoggi, moltiplicata per una serie di delta di Dirac che consente di tener conto delle azioni degli appoggi solo dove sono applicate, descrivendo così una sorta di "pettine" la cui configurazione rimane costante al variare del tempo. Il termine a secondo membro rappresenta infine la forzante, inizialmente costituita da una forza mobile di modulo costante. Il sistema di riferimento spaziale ha la sua origine nel baricentro della rotaia nella configurazione a riposo mentre quello temporale coincide col punto di applicazione della forzante all'istante iniziale $t=0$.

3. SOLUTORI FEM PER PROBLEMI NON STAZIONARI

Per la risoluzione dell'equazione (1) è necessario, viste le notevoli difficoltà nell'integrazione analitica di un'equazione differenziale contenente una serie, ricorrere ad algoritmi numerici che operino nel dominio del tempo. Nel presente lavoro si è risolta numericamente l'equazione non stazionaria che descrive dinamicamente il modello utilizzando il metodo agli elementi finiti (FEM) per l'approssimazione spaziale. Il FEM [3,4] rappresenta la formulazione variazionale di un problema fisico, ossia la trasformazione in forma integrale (funzionale) dell'equazione differenziale che regola il sistema. Per la meccanica dei continui ad esempio il funzionale è rappresentato dall'energia potenziale e nel caso di un problema monodimensionale può essere genericamente espresso nella forma

$$\Pi(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \dots, \frac{d^m\varphi}{dx^m}) dx \quad (2)$$

Anziché risolvere l'equazione differenziale si calcola il funzionale $\Pi(\varphi)$, approssimando la variabile φ con una combinazione di funzioni interpolanti note N_i e parametri incogniti φ_i .

$$\varphi = \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i \quad (3)$$

Le funzioni interpolanti, dette funzioni di forma, sono definite non nell'intero dominio di integrazione, ma in domini più piccoli, detti elementi finiti, ottenuti per discretizzazione del dominio di assegnazione. Essi hanno una forma che dipende dal problema da esaminare; per problemi a due variabili x, y indipendenti, hanno una forma quadrangolare o triangolare e sono collegati fra loro in punti particolari, detti nodi, che coincidono con i vertici dell'elemento. Indicando con $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ i valori che φ assume negli n nodi dell'elemento, se φ è definita nel piano x - y , possiamo scrivere

$$\varphi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^e(x, y) \varphi_i^e = N^{eT}(x, y) \boldsymbol{\varphi}^e \quad (4)$$

avendo l'accortezza di esprimere le variabili nodali funzioni del tempo a causa della non stazionarietà del problema. Sostituendo la (4) nella (2) per ogni elemento, si ottiene un sistema di n equazioni nelle incognite φ_i .

$$\varphi(x, t) = \sum_i N_i(x) \cdot \varphi_i(t) \quad (5)$$

In tal modo si è ottenuto un sistema di equazioni differenziali ordinarie nel tempo del 1° ordine in cui tutte le informazioni necessarie per determinare l'unica soluzione sono conosciute nel punto iniziale $t=0$ e pertanto risolvibili col metodo delle differenze finite che è una tecnica dell'analisi numerica che approssima l'equazione differenziale mediante differenze finite lasciando intatto il dominio. In conseguenza del passo temporale scelto si definisce un insieme opportuno di istanti temporali nei quali viene individuata la soluzione del problema mediante la conversione del sistema di equazioni differenziali ordinarie in un sistema algebrico nell'incognita $\boldsymbol{\varphi}^e$ ($n \times 1$). Il metodo degli elementi finiti e quello delle differenze finite, che concorrono nelle risoluzioni numerica del modello in due fasi distinte e sequenziali, sono così due metodi duali, nel senso che il primo discretizza il continuo a cui poi si applicano le equazioni esatte in forma variazionale e, viceversa, il secondo approssima le equazioni differenziali al dominio intatto.

4. L'UTILIZZO DEL PDE PER LA SOLUZIONE NUMERICA DEL MODELLO MATEMATICO

La sequenza di passi mediante la quale si effettua l'analisi agli elementi finiti per un problema non stazionario può essere implementata con l'ausilio di un calcolatore. Il solutore di sistemi di equazioni differenziali contenuto nel *Partial Differential Equations* (PDE) Toolbox che lavora in ambiente MATLAB si è rivelato sufficientemente potente ed idoneo allo scopo. Il PDE Toolbox si compone di tre moduli fondamentali:

1. un Preprocessore che utilizza le informazioni sulla geometria del dominio, sulle condizioni al contorno, sulla tipologia dell'equazione differenziale con i relativi coefficienti per definire le specifiche del problema;
2. un Processore che effettua l'approssimazione del parametro φ nell'elemento, fornendo la soluzione approssimata dell'equazione;
3. un Postprocessore che consente di visualizzare i risultati, effettuando una interpolazione dei valori nodali su una griglia rettangolare.

Per risolvere numericamente il modello della dinamica verticale del binario si è dovuta rivedere la formulazione matematica del problema affinché potesse essere gestibile dal PDE. Per effettuare questo processo si sono dovuti considerare sia i problemi dovuti ad un approccio risolutivo di tipo numerico sia quelli connessi all'impiego del PDE.

Dal momento che risulta impossibile per via numerica definire sommatorie con estremi infiniti, limitare l'indice della serie (1) significa passare da un dominio infinito ad uno limitato, ossia considerare un numero finito di supporti. Inoltre la funzione delta di Dirac non è una funzione nel senso convenzionale del termine ma una sorta di "interruttore" che accende o spegne il termine che la moltiplica a seconda che l'argomento della funzione sia uguale a zero oppure no.

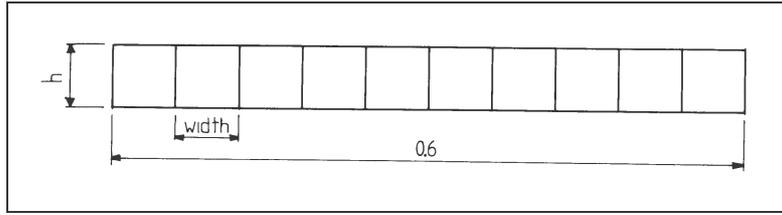


Fig. 2 Rappresentazione della campata come composizione di sottodomini. La distanza fra i supporti (= 0.6 m), all'estremità della campata, viene suddivisa in 10 sottodomini con width = 0.06 m

Il dominio pertanto non è continuo; nel caso della rotaia esso risulta dalla composizione di tanti sottodomini uguali e contigui l'uno all'altro, caratterizzati dalla presenza dei supporti dove l'ascissa spaziale coincide con la coordinata degli appoggi viscoelastici e dalla presenza della forzante in corrispondenza del sottodominio in cui la forzante è istantaneamente applicata. In figura (2) è rappresentata una vista dall'alto della schematizzazione della rotaia (piano x-y); poiché il problema è monodimensionale, la dimensione laterale è necessaria per il solutore ma verrà "disattivata" come illustrato in seguito; di conseguenza si sono scelti elementi quadrati in quanto hanno la maggiore regolarità.

L'equazione di Kisilowski (1) può essere riformulata in termini di un sistema di equazioni differenziali del tipo parabolico, avendo indicato con ψ il valore del momento moltiplicato per EJ e con ξ la variazione istantanea dello spostamento puntuale z_t del binario. Questo sistema di equazioni, qui di seguito esplicitato per indice si sommatoria nell'intervallo $[-2,+2]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{\partial^2 z_t}{\partial x^2} \\ \xi = \frac{\partial z_t}{\partial t} \\ EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m_t \frac{\partial \xi}{\partial t} + k_t z_t \cdot [\delta(x-2l_t) + \delta(x-l_t) + \delta(x) + \delta(x+l_t) + \delta(x+2l_t)] + \\ \quad + c_t \xi \cdot [\delta(x-2l_t) + \delta(x-l_t) + \delta(x) + \delta(x+l_t) + \delta(x+2l_t)] = P \delta(x-vt) \end{array} \right. \quad (6)$$

può essere espresso in forma matriciale per ciascun elemento come:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} - \nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ k_t & c_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (7)$$

oppure, con le classiche notazioni vettoriali,

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + a \cdot u = f \quad (8)$$

ed è risolubile dal PDE. Le matrici d , c , a ed il vettore f sono a coefficienti costanti con la precisazione che la rigidità k_t e lo smorzamento c_t degli appoggi esistono *solo* in corrispondenza dei sottodomini in cui è presente il supporto viscoelastico mentre la forzante P esiste *solo* in corrispondenza del sottodominio sul quale agisce all'istante considerato; ovviamente, il sistema completo (7) si applica qualora la sollecitazione sia applicata sul supporto.

Come precedentemente accennato, il problema parabolico è definito dal PDE in una regione del piano x-y mentre la rotaia contemplata nel modello matematico ha uno sviluppo monodimensionale. Questa non è soltanto una differenza formale, ma implica un gradiente della soluzione in direzione trasversale all'asse longitudinale del binario. Al fine di rendere nulla questa variazione in direzione y è necessario azzerare i coefficienti c_y . Di conseguenza, visto che viene a cadere ogni corrispondenza fra l'estensione trasversale del dominio ed il modello matematico, la scelta della dimensione lungo y è dettata da altre ragioni, preferibilmente fra tutte la necessità di generare una discretizzazione più regolare possibile, la cui migliore realizzazione consiste nell'uso di sottodomini di dimensione quadrata i cui lati rettilinei garantiscono che il contorno sia approssimato in modo preciso dagli elementi finiti.

Il sistema di equazioni differenziali risulta quindi descritto in modo univoco una volta fissate le condizioni al contorno, imponendo l'appoggio alle estremità del binario (momento e spostamento nulli), ed i valori iniziali corrispondenti alla configurazione di binario a riposo.

Il problema parabolico così definito non converge però numericamente in quanto la matrice d nella (8) ha determinante nullo in quanto contiene una riga identicamente nulla. Per tentare di risolvere numericamente il problema si è allora introdotto un valore ε , molto piccolo rispetto agli altri parametri in gioco, per cui il sistema di equazioni è riscritto nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} - \nabla \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix} \nabla \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ k_t & c_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (9)$$

Questa metodologia viene normalmente applicata per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali e va sotto il nome di Teoria delle perturbazioni. Un tipico problema $P_\varepsilon(y_\varepsilon)=0$ di perturbazione dipende da un piccolo parametro ε tale che, al tendere di ε a 0, la soluzione $y_\varepsilon(x)$ converge al valore $y_0(x)$ del problema ai valori iniziali $P_0(y_0)=0$. Per ulteriori dettagli si rimanda il lettore al lavoro [5]. Non è stato compiuto uno studio analitico per verificare che la soluzione ottenuta per convergenza sia effettivamente quella corretta ma ci si è limitati ad osservare che l'andamento fisico delle soluzioni è compatibile con i vincoli, le condizioni iniziali e al contorno per valori qualunque di ε nell'intervallo $10^{-8} \div 10^{-20}$. Nelle simulazioni riportate nel prosieguo del presente lavoro è stato utilizzato $\varepsilon=10^{-8}$ che minimizza i tempi di calcolo.

Come è stato poi abbondantemente verificato, risultati apprezzabili si individuano solo per poche campate contigue a quella sulla quale è applicato il carico, mentre il resto del dominio resta praticamente indisturbato. Questa zona di influenza ha un'ampiezza che dipende dai parametri numerici con cui viene modellato il sistema. Allo scopo di ottimizzare i tempi di calcolo, facendo in modo che la soluzione sia calcolata su un dominio di dimensioni strettamente necessarie ad evitare indesiderati effetti di bordo, si è utilizzato un artificio assimilabile ad un *tapis roulant* (fig. 3). Il dominio di sollecitazione è stato anzitutto limitato ai 10 sottodomini nei quali viene normalmente suddivisa una campata e, una volta che la forzante ha percorso la campata stessa, le matrici vengono opportunamente *shiftate* perdendo la prima campata ed introducendone una con condizioni iniziali nulle. Con questo accorgimento è come se tutto il binario scorresse sotto la forzante di una lunghezza pari ad una campata. Agli occhi di un osservatore fisso la forzante si muove continuamente su una campata *test* che è situata sostanzialmente a metà del dominio e la percorre un numero di volte selezionabile dall'utente. Questo accorgimento consente di ridurre sensibilmente i tempi di calcolo dal momento che la soluzione è valutata su un dominio più piccolo, a parità di percorso registrato da un odometro solidale col carico.

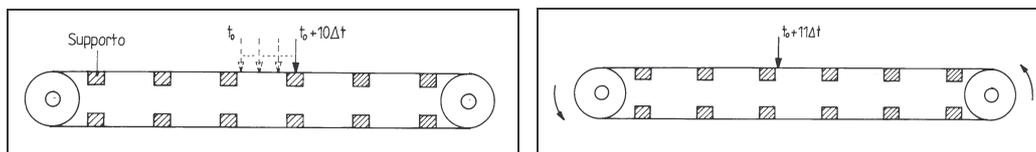


Fig. 3 Riduzione del dominio al fine di diminuire i tempi di calcolo senza influire sulla precisione della soluzione (a sinistra). Scorrimento del *tapis roulant* dopo l'attraversamento di una campata (a destra).

Un'ulteriore miglioria al modello consiste nel considerare il semplice modello di veicolo illustrato in fig.(4). L'oscillatore è formato da una massa m_b (corrispondente a metà massa del carrello) appoggiata su un semplice stadio di sospensione (corrispondente alla sospensione primaria).

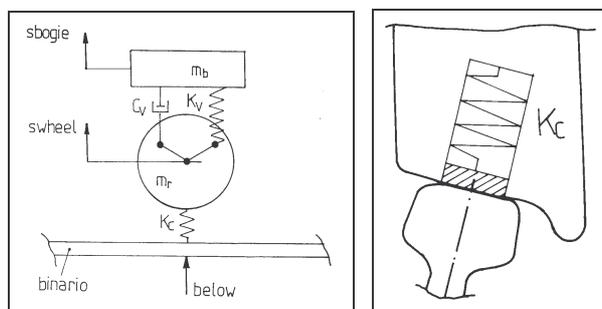


Fig. 4 Oscillatore semplice rappresentativo del carrello ferroviario

La molla interposta tra ruota e binario tiene conto delle deformazioni Hertziane nella regione di contatto. Si presuppone che l'orientamento della molla venga aggiornato in maniera tale da mantenersi costantemente perpendicolare al piano di tangenza tra le superfici a contatto. In prima approssimazione gli effetti legati alla geometria dell'accoppiamento ruota - rotaia si ipotizzano lineari.

Sebbene non si possa in questa sede scendere nel dettaglio del modello, esso è in grado di prevedere correttamente le variazioni dinamiche della forza di contatto tra veicolo e armamento che si generano per effetto delle caratteristiche dell'armamento. L'obiettivo è poter eccitare l'oscillatore tramite le caratteristiche della linea e trovare di conseguenza le sollecitazioni di risposta. A convergenza raggiunta sul singolo *step* si inizia un nuovo passo di integrazione facendo avanzare l'oscillatore. Le due equazioni di moto del sistema possono essere ricavate scrivendo gli equilibri dinamici alla traslazione delle due masse, considerate come sistemi isolati, e mettendo in evidenza le forze esterne agenti sulle stesse. Assumendo, per convenzione, positive le forze concordi con gli spostamenti, l'equazione dinamica del moto risulta, con le notazioni della fig. 4,

$$\begin{pmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{swheel} \\ \ddot{sbogie} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{swheel} \\ \dot{sbogie} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_c + k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} swheel \\ sbogie \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_c \cdot below - m_r g \\ -m_b g \end{pmatrix} \quad (10)$$

dove *below* rappresenta lo spostamento dell'armamento in corrispondenza del punto di contatto ruota - rotaia. Sulla rotaia agisce la forze $P = -k_c(below - swheel)$ che esprime l'azione di compressione della molla Hertziana. La simulazione dinamica del veicolo è stata effettuata in SIMULINK e, ad ogni step di integrazione, sia il modello PDE del binario sia il modello SIMULINK del veicolo utilizzano come valori di innesco le soluzioni computate sul sottodominio precedente. E' interessante notare come sia possibile, senza sforzo, tener conto del vincolo monolatero. Essendo infatti la soluzione di tipo iterativo, la forza viene annullata se risulta $below < swheel$, condizione che porterebbe ad una forza positiva e pertanto priva di senso fisico.

Un ulteriore sviluppo del modello ha riguardato l'implementazione di irregolarità della superficie della rotaia. I modelli sviluppati considerano difettosità puntuali e distribuite sulla rotaia che introducono forze di interazione binario - veicolo particolarmente elevate e complesse. Ovviamente l'ipotesi di linearità del contatto Hertziano limita grandemente i risultati ottenuti nei casi estremi, laddove si abbiano distacchi ripetuti.

5. CASI STUDIATI

A partire dal caso di una forza mobile di modulo costante, contemplata nel modello matematico, si è estesa progressivamente l'indagine valutando la risposta del sistema binario - supporti sollecitato da un carico statico, da un'eccitazione impulsiva e da un carico mobile di intensità costante fino ad un oscillatore che rappresenta, in modo estremamente schematico, un veicolo ferroviario.

Nel seguito vengono illustrate alcune soluzioni di esempio; la simbologia grafica usata nei grafici è la seguente:

- * ascissa in corrispondenza di ogni supporto
- oP punto di applicazione della forzante
- o soluzioni valutate, limitatamente ai supporti, con il metodo di Mohr.

I parametri dinamici e geometrici considerati sono i seguenti:

- Estensione l_c della campata = 0.6 m
- Massa lineare m_l del binario = 56 kg/m
- Rigidezza flessionale EJ del binario = 4.86e6 MNm²
- Rigidezza del supporto k_r = 280e8 N/m
- Smorzamento del supporto c_r = 82e3 Ns/m
- Estensione *width* del sottodominio = 0.06 m

5.1 Carico statico

Per il caso statico, che evidentemente rappresenta una sottoclasse del problema dinamico generale, ci si è limitati ad una verifica dei valori di deflessione ottenuta e ad una validazione della linea elastica elaborata dal modello grazie alla stesura di un algoritmo che implementa il metodo di Mohr [7] in grado di fornire la deflessione del binario in corrispondenza degli appoggi ed il momento flettente in tali punti.

Si è simulato un tratto di binario di 6.6 m (11 campate) sottoposto ad un peso di 100 kN (carico statico per ruota per armamenti di categoria C4) applicato nel sottodominio di mezzo della campata centrale (sottodominio 55) e, successivamente, applicato in corrispondenza del VI supporto (sottodominio 50).

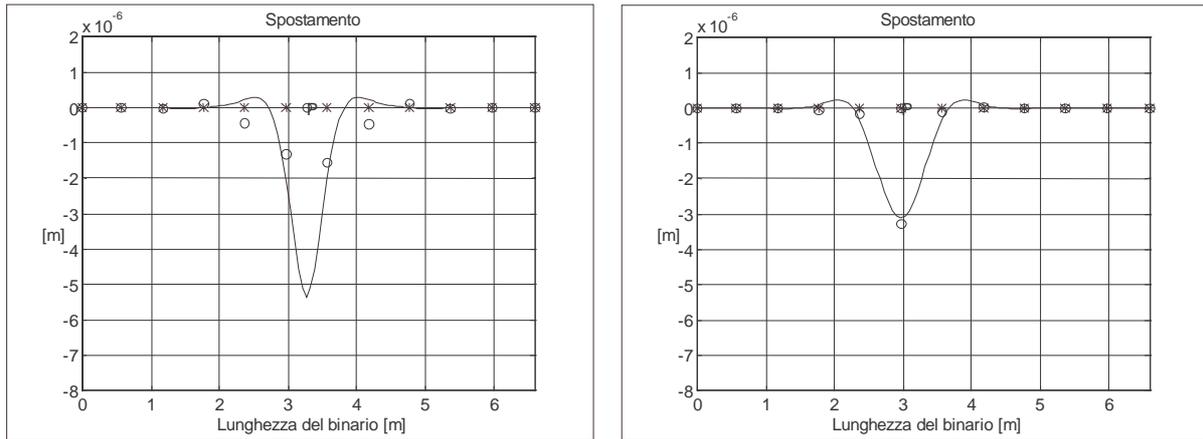


Fig. 5 Linea elastica di un binario di 6.6 m sottoposto ad un carico statico di 100 kN applicato nel sottodominio a metà della campata centrale (a sinistra) ed in corrispondenza del VI supporto (a destra.)

5.2 Carico impulsivo

Scopo della simulazione con impulso è quello di indagare sulla deformata di un tratto di binario pari a 11 campate sollecitato da una forza impulsiva di 10 kN applicata per 1 ms nel sottodominio di mezzo della campata centrale. La soluzione viene valutata in diversi istanti temporali durante e dopo l'eccitazione impulsiva. L'output è costituito da una serie di soluzioni ai vari istanti di tempo che possono essere visualizzate come una sequenza di immagini che consentono di indagare sul transitorio. È importante sottolineare come le caratteristiche dell'impulso (durata ed intensità) siano totalmente controllabili dall'utente. I valori sono desunti dalle esperienze effettuate in [8] grazie alle quali è stato possibile validare i risultati ottenuti dal codice.

In figura (6) si riportano alcuni *frames* ottenuti durante l'applicazione dell'impulso e durante la fase di successivo decadimento libero delle vibrazioni.; in fig. (7) gli spostamenti nel tempo di alcuni punti significativi.

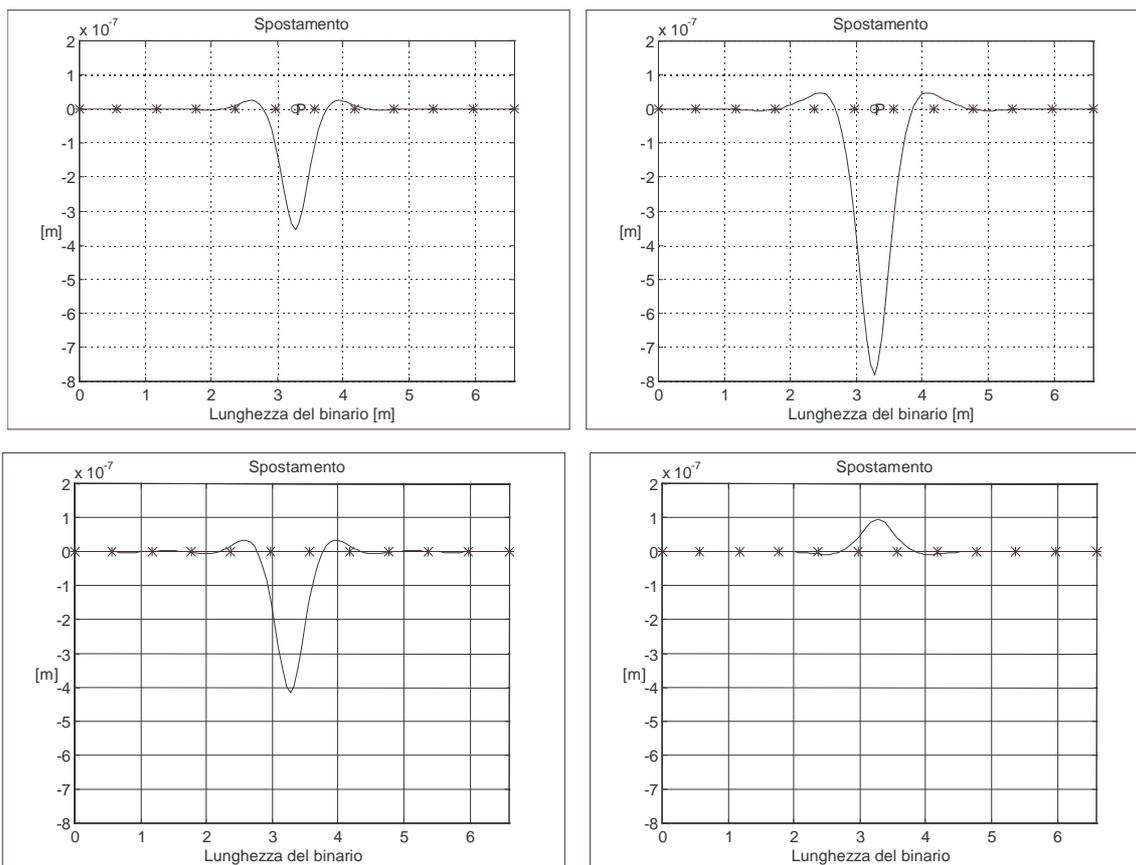


Fig. 6 Simulazioni sotto carico impulsivo ($F=10$ kN, durata = 1 ms). Da sinistra a destra, dall'alto in basso: $t=0.17$ s, $t=0.5$ s, $t=1$ s, $t=1.6$ s dall'inizio dell'applicazione della forzante

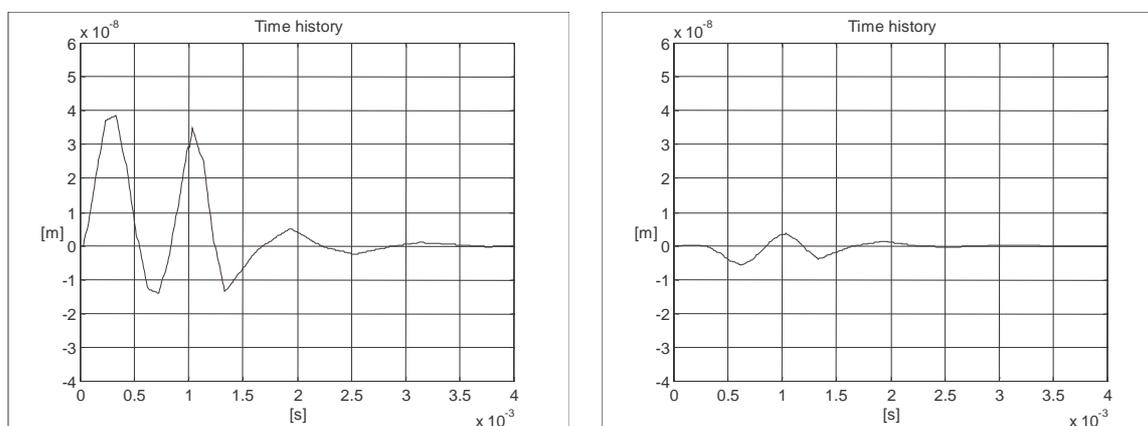


Fig. 7 Time history della deformazione a metà della campata a fianco di quella eccitata (a sinistra) e ad 1.8 m dal punto di applicazione (in basso a sinistra). L'andamento è stato ottenuto mediante 400 steps con $\Delta t=10\mu s$

5.3 Carico mobile di intensità costante

I risultati per i casi di carico mobile differiscono poco graficamente dal caso statico ad eccezione delle velocità più alte. In figura (8) vengono illustrati alcuni frames per una forza di intensità pari a 100 kN che si muove ad una velocità costante di 100 km/h. La prova viene effettuata facendo in modo che la forzante ripercorra più volte la campata centrale al fine di abbattere sensibilmente i tempi di calcolo senza togliere di generalità alla soluzione. Dopo circa cinque iterazioni il comportamento resta stabile. Il tempo di percorrenza di ciascun sottodominio risulta, alla velocità di 100 km/h, pari a 2 ms mentre la scala temporale ha origine nell'istante di inizio simulazione.

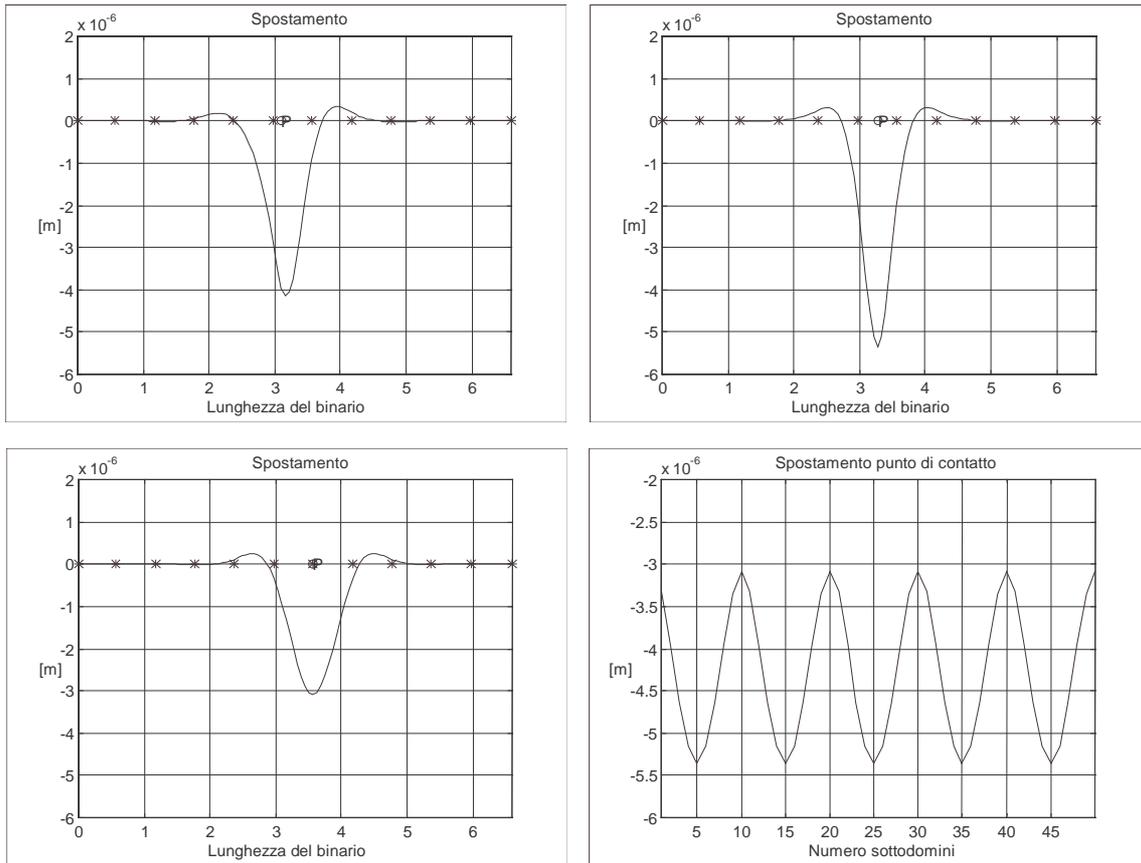


Fig. 8 Simulazioni sotto carico mobile costante ($F=100$ kN, $v=100$ km/h). Da sinistra a destra, dall'alto in basso: $t=86$ ms, $t=90$ ms, $t=94$ ms, spostamento del punto di contatto visto da un osservatore solidale alla forza

Evidentemente, il comportamento del sistema è lineare con il carico, mentre all'aumentare della velocità i fenomeni inerziali assumono sempre maggiore importanza. Nel caso di $F=100$ kN e $v=500$ km/h si osserva come la zona perturbata dal carico si estenda per un numero di campate maggiori rispetto ai casi precedenti. E' stato pertanto necessario incrementare l'estensione del dominio passando da 11 a 21 campate per limitare gli effetti di bordo. Si osserva (figg. 9, 10) come il binario reagisca con un certo ritardo alla sollecitazione conservando per inerzia il disturbo nella regione precedentemente eccitata. Il disturbo si propaga apprezzabilmente fino a 7 campate dal punto di applicazione, mentre nel caso di velocità di 100 km/h è limitato a 3 campate (fig. 8). Dal confronto degli andamenti in fig. (10) è evidente sia la presenza degli effetti di inerzia legati all'alta velocità, sia come una campionatura 20 volte più fitta (sottodomini di 0.02 m) rispetto alle consuete permette di evidenziare, alla velocità di 100 km/h, un disturbo a frequenza elevata negli istanti immediatamente seguenti al passaggio del supporto.

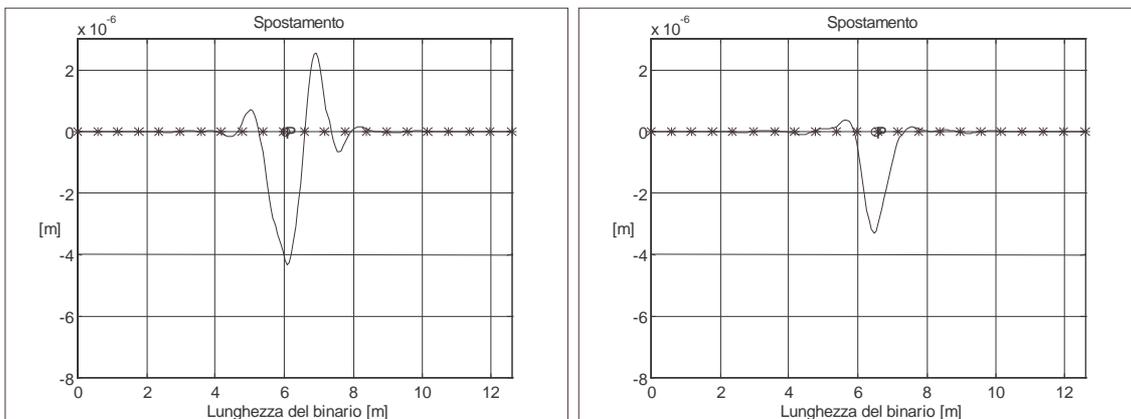


Fig. 9 Due frames dalle simulazioni sotto carico mobile costante ($F=100$ kN, $v=500$ km/h). E' evidente il diverso comportamento rispetto alle velocità inferiori

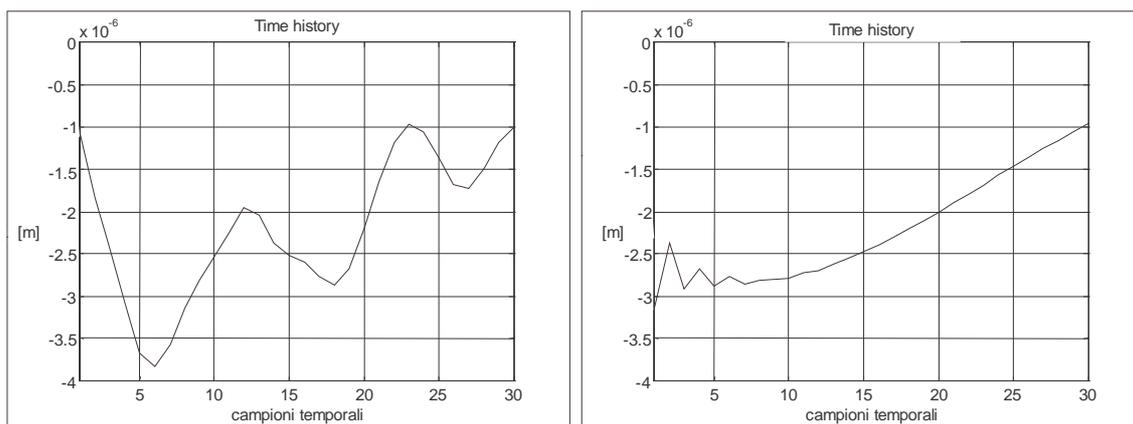


Fig. 10 *Time history* dello spostamento rilevato a 10 cm dal supporto di sinistra della campata attraversata dalla forzante di 100 kN a 500 km/h (a sinistra, $\Delta t=1.44e-4$ s) e dalla forzante di 100 kN a 100 km/h (a destra, $\Delta t=7.2e-4$ s).

5.4 Oscillatore mobile semplice su binario perfetto

La prova è stata finalizzata alla simulazione del comportamento di un sistema costituito da un binario a supporti discreti sollecitato dall'oscillatore che si muove ad una velocità di 100 km/h. Come riferimento per il veicolo si prende il carrello Y0270 della carrozza Eurofima le cui caratteristiche sono di seguito riportate:

$m_r = 907$ kg; $\frac{1}{2}$ massa assile

$m_b = 1307$ kg; $\frac{1}{2}$ massa carrello

$c_v = 840$ N/ms⁻¹; smorzamento verticale sospensione primaria

$k_v = 788700$ N/m; rigidità sospensione primaria

Per il valore della rigidità lineare di contatto k_c ruota - rotaia si è fatto riferimento a [9] dove si riporta un valore di $1.5e9$ N/m. Le condizioni di prova prevedono un dominio di 21 campate e un numero di passaggi pari a 9, per dare il tempo necessario alla soluzione di stabilizzarsi. Per motivi di spazio non si riportano i diagrammi degli spostamenti verticali del binario né dello spostamento verticale del punto di contatto mobile, non molto diversi dai casi precedenti; si riportano invece (fig. 11) le forze di contatto che dimostrano come la soluzione a 100 km/h si stabilizzi intorno al valore statico dopo aver attraversato la prima campata al confronto delle 4÷5 campate necessarie al Dong [6] e come a 500 km/h l'escursione della forza di contatto risulti all'incirca un ordine di grandezza superiore.

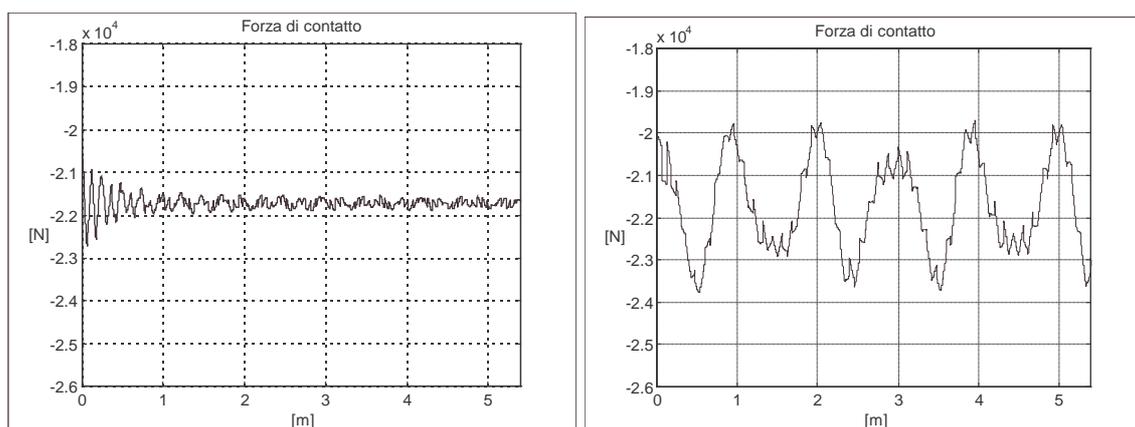


Fig. 11 Andamento della forza di contatto ruota - rotaia per velocità di 100 km/h (a sinistra) e di 500 km/h (a destra)

Knothe-Grassie [1] individuano il campo di frequenze corrispondenti al *pinned-pinned mode* del binario nell'intervallo che va dai 400 ai 500 Hz. Considerando una frequenza di 400 Hz, la velocità critica che eccita una lunghezza d'onda flessionale del sistema, limitatamente alle oscillazioni verticali con semilunghezza d'onda pari alla distanza tra le traverse, è di oltre 1700 km/h, quindi palesemente irraggiungibile.

5.5 Oscillatore semplice su binario con imperfezione localizzata

Il comportamento del sistema viene analizzato in presenza di una irregolarità puntiforme di 0.2 mm che sporge dalla superficie del binario [10] ed è collocata dopo 2.1 m dal punto di partenza, nel sottodominio 35 (ogni

campata è composta da 10 sottodomini). Si noti (fig. 12) come la deflessione del punto di contatto evidenzi la presenza dell'irregolarità puntuale di 0.2 mm. L'ordine di grandezza dell'irregolarità è circa 2 volte maggiore dello spostamento massimo del binario per cui il contributo dato dall'inflessione risulta appena accennato, anche se ben riconoscibile. È inoltre interessante rilevare l'avvenuto distacco tra ruota e rotaia, riconoscibile dall'annullarsi della forza, prima che il contributo smorzante prenda il sopravvento.

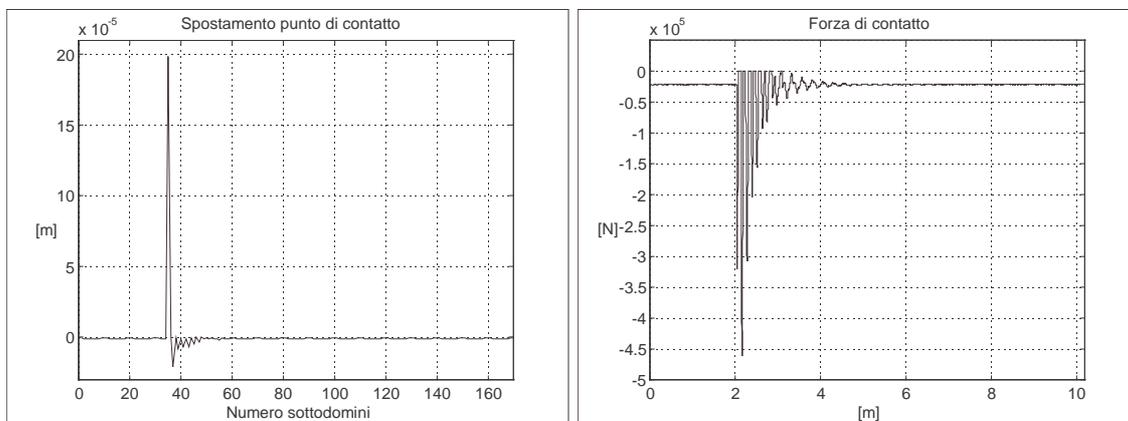


Fig. 12 Andamento dello spostamento in corrispondenza del punto di contatto ruota-rotaia (a sinistra) e relativo andamento della forza di contatto (a destra) per $v=144$ km/h

5.6 Oscillatore semplice su binario con imperfezione distribuita

Il comportamento del sistema viene analizzato in presenza di una corrugazione sulla superficie di rotolamento della ruota dell'ampiezza di $18 \mu\text{m}$ e lunghezza d'onda di 180 mm [11]. Lo spostamento del punto di contatto tiene conto di un duplice contributo: lo scostamento puntuale della superficie di rotolamento dall'assetto geometrico perfetto e la componente dovuta all'inflessione della rotaia. Visto che si tratta di un fenomeno ad alta frequenza, che tende a stabilizzarsi molto velocemente, è possibile ridurre l'estensione del dominio limitandolo a 7 campate. Viene inoltre ridotta a 0.02 m l'estensione del sottodominio per poter meglio descrivere l'andamento del punto di contatto ruota-rotaia. I passaggi della campata centrale sono 7 e la velocità è di 144 km/h.

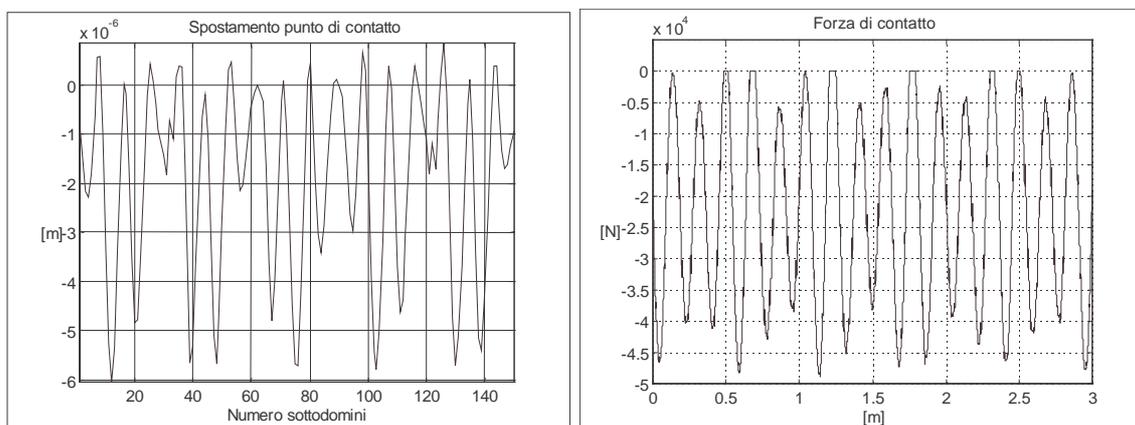


Fig. 13 Andamento dello spostamento in corrispondenza del punto di contatto ruota - rotaia (a sinistra) e relativo andamento della forza di contatto (a destra)

Si noti (fig. 13) come la deflessione del punto di contatto evidenzi sia la presenza dei supporti in corrispondenza dei sottodomini 30, 60, 90, 120 e 150, che con la loro rigidità diminuiscono l'abbassamento, sia la lunghezza d'onda della corrugazione pari a 180 mm. È interessante, infine, rilevare come la corrugazione sia tale da provocare in alcuni istanti il distacco della sala ferroviaria in corrispondenza dei supporti. I risultati ottenuti in presenza delle irregolarità, sia puntuali sia distribuite, ipotizzano una forza di interazione lineare non confrontabile con le pressioni Hertziane che si scambiano ruota e binario nella zona di contatto. Le indicazioni dedotte da queste simulazioni hanno pertanto valore prevalentemente qualitativo.

6. CONCLUSIONI E SVILUPPI

Il modello elaborato nel presente lavoro risponde all'esigenza di descrivere con notevole efficienza il comportamento del sistema binario-supporti-eccitazione mobile nella sua totalità tenendo conto della periodicità dei supporti e della presenza di irregolarità sulla superficie di rotolamento.

I risultati sono disponibili negli ambienti MATLAB, SIMULINK e PDE, il che consente un rapido interfacciamento ai codici per la simulazione della dinamica di marcia dei rotabili sviluppati per uso interno dagli autori.

Il codice è stato utilizzato estensivamente nella progettazione di un sensore per la misura del carico verticale delle ruote al passaggio del treno illustrato in altra memoria al presente convegno [12].

Tra gli sviluppi possibili si citano la taratura mediante prove sperimentali ad hoc su armamenti e con veicoli controllati, l'inserimento di un ulteriore stadio di sospensione verticale, di uno grado di libertà laterale, dell'uso di travi di Timoshenko per incrementare il campo di frequenza, della non linearità del contatto Hertziano.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare l'ing. Gaetano Cascini del Dipartimento di Meccanica e Tecnologie Industriali e l'ing. Paolo Acciai per il continuo supporto durante l'intera attività di ricerca.

Bibliografia

- [1] Knothe K.L. and Grassie S.L., "Modelling of railway track and vehicle-track interaction at high frequencies", *Veh. Syst. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993
- [2] Kisilowski J. and Knothe K., *Advanced railway vehicle-system dynamics*, Warsaw, 1991.
- [3] Cesari F., *Introduzione al metodo degli elementi finiti*, Pitagora Editrice, Bologna, 1995.
- [4] Reddy J.N., *An introduction to the finite element method*, Singapore, 1993.
- [5] Smith R.D., *Singular-perturbation theory*, New York, 1995.
- [6] Dong R.G., Saukar S. and Dukkupati R.V., "A finite element model of railway track and its application to the wheel flat problem", *Journal of Rail and Rapid Transit*, **208**, 61-72, 1994.
- [7] Timoshenko S.P. and Gere J.M., *Theory of elastic stability*, John Wiley and Sons, Auckland, 1963.
- [8] Cascini G., *Un modello per la ricostruzione del segnale prodotto da sorgenti mobili ed applicazione alle vibrazioni di binari ferroviari*, Degree Thesis, Università degli studi di Firenze, Facoltà di Ingegneria, 1996.
- [9] Grassie S.L., Gregory R.W., Harrison D. and Johnson K.L., "The dynamic response of railway track to high frequency vertical/lateral/longitudinal excitation", *Journal Mechanical Engineering Science*, **24**, 103-110, 1982.
- [10] Dahlberg T., Akesson B. and Westberg S., "Modelling the dynamic interaction of wheelset and track", *Railway Gazette International*, June 1993, 408-412.
- [11] Hempelmann K., Ripke B. and Dietz S., "Modelling the dynamic interaction of wheelset and track", *Railway Gazette International*, September 1992, 591-595.
- [12] A. Bracciali, R. Ciuffi and F. Piccioli, "Vibrazioni nelle traverse al passaggio di ruote ferroviarie danneggiate", in *Atti del XXX Convegno AIAS*, Alghero, Italia, 2001